畢氏定理和三角函數

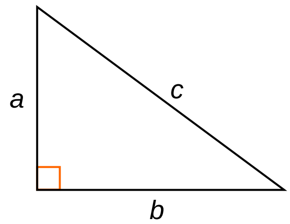
第 2 冊第 1 課 p.9
（運算）

a 畢氏定理

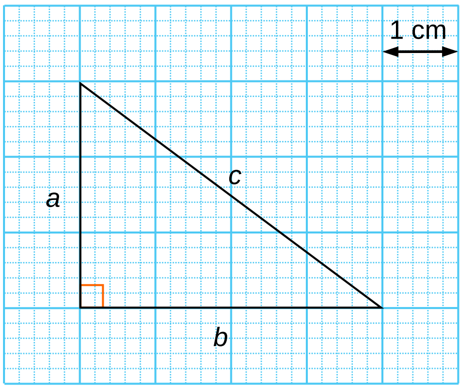
畢氏定理指出，任何直角三角形的三條邊都有以下關係：

$c^2 = a^2 + b^2$

因此，若已知道三角形的其中兩條邊的長度，便可利用這條方程求得第三條邊的長度。



考慮以下直角三角形，$a = 3$ cm 和 $b = 4$ cm。



根據畢氏定理，

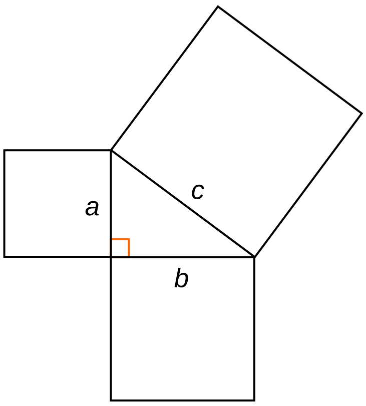
$c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ cm

你可以用直尺量度 c 的長度，以驗證答案是否正確。

知多一點點

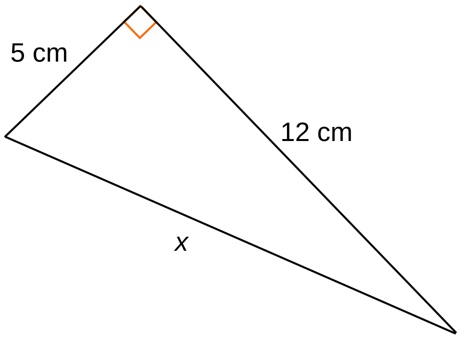
「畢氏」所指的是古代希臘數學家畢達哥拉斯，他可能是第一個證明畢氏定理的人。他指出，若以直角三角形的邊為正方形的邊長，畫出三個正方形，則最大正方形的面積相等於兩個較小正方形面積之和。



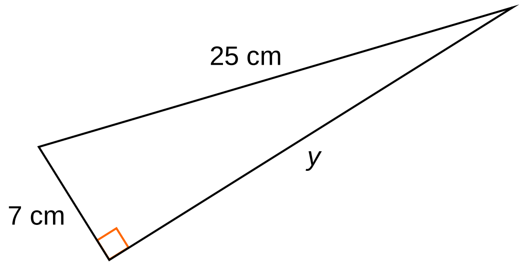
例題

試找出下列各直角三角形中的未知數。

(a)



(b)



題解

(a) 根據畢氏定理，

$$x^2 = 5^2 + 12^2$$

$$x = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

(b) 根據畢氏定理，

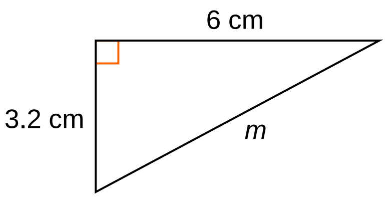
$$25^2 = 7^2 + y^2$$

$$y = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$

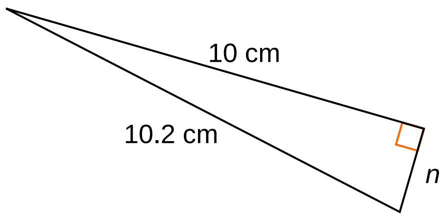
練習 1

1 試找出下列各直角三角形中的未知數。

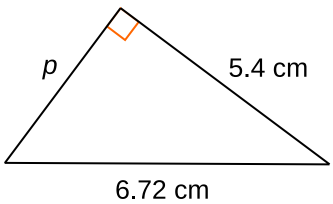
(a)



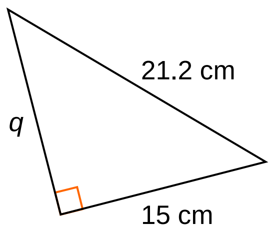
(b)



(c)



(d)



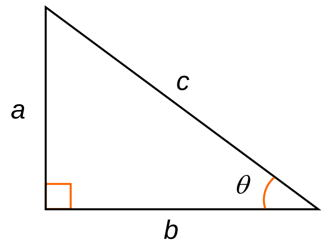
b 三角函數

考慮右方的直角三角形。三角函數的定義如下：

角 θ 的正弦：　$\sin\theta = \dfrac{a}{c}$

角 θ 的餘弦：　$\cos\theta = \dfrac{b}{c}$

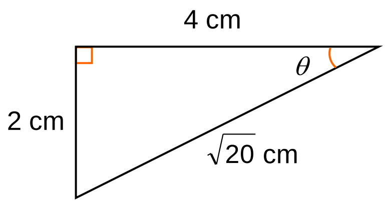
角 θ 的正切：　$\tan\theta = \dfrac{a}{b}$



注意：三角函數是不帶單位的。

例題

右圖是一個直角三角形。求 **(a)** $\sin\theta$、**(b)** $\cos\theta$，及 **(c)** $\tan\theta$。



題解

圖中可見，$a = 2$ cm、$b = 4$ cm 和 $c = \sqrt{20}$ cm。

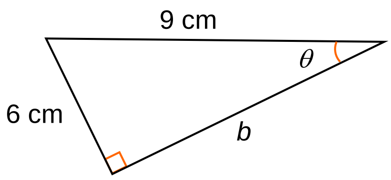
(a)　$\sin\theta = \dfrac{a}{c} = \dfrac{2}{\sqrt{20}} = 0.447$

(b)　$\cos\theta = \dfrac{b}{c} = \dfrac{4}{\sqrt{20}} = 0.894$

(c)　$\tan\theta = \dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

例題

右圖是一個直角三角形。求 **(a)** $\sin\theta$、**(b)** $\cos\theta$，及 **(c)** $\tan\theta$。



題解

圖中可見，$a = 6$ cm 和 $c = 9$ cm。邊 b 可用畢氏定理求得。

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\text{ cm}$$

(a)　$\sin\theta = \dfrac{a}{c} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} = 0.667$

(b)　$\cos\theta = \dfrac{b}{c} = \dfrac{3\sqrt{5}}{9} = 0.745$

(c)　$\tan\theta = \dfrac{a}{b} = \dfrac{6}{3\sqrt{5}} = 0.894$

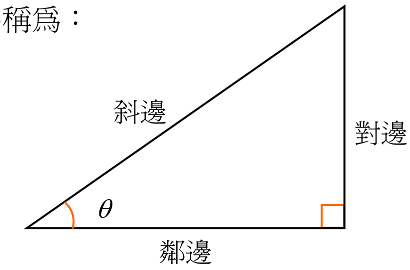
知多一點點

考慮一個直角三角形，設它的某個銳角為 θ。該三角形每條邊的名稱為：

斜邊：三角形最長的一條邊，在直角對面

θ 的鄰邊：在 θ 旁邊，但不是斜邊

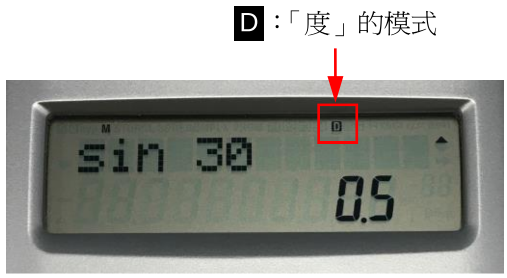
θ 的對邊：在 θ 對面



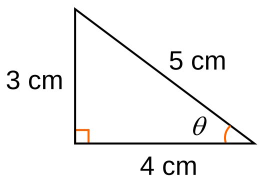
若知道直角三角形中角 θ 的大小，就可用計算機找出三角函數。

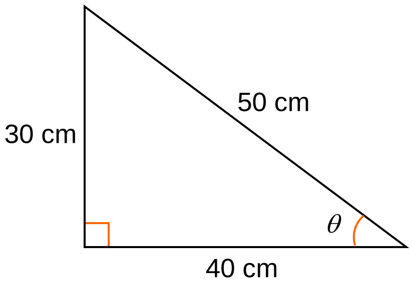
例如：若 $\theta = 30°$，sin 30° = 0.5。

（謹記把計算機預設為「度 (degree)」的模式。）



只要直角三角形的 θ 是 30°，該角的正弦就必定等於 0.5。由此可見，無論三角形面積是多少，只要兩個三角形有相同的角 θ，該角的三角函數也必定相同。也就是說，三角函數的值只取決於 θ。





$$\sin\theta = \frac{3}{5} \qquad \sin\theta = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

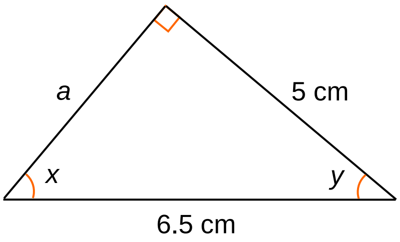
$$\cos\theta = \frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{4} \qquad \tan\theta = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

相反，若知道角 θ 的某個三角函數，也可以用計算機找出 θ 的大小。

例 題

找出圖中的未知數。



題 解

根據畢氏定理，

$$a^2 = 6.5^2 - 5^2$$

$$a = \sqrt{6.5^2 - 5^2} = 4.15 \text{ cm}$$

$$\sin x = \frac{5}{6.5} \quad \Rightarrow \quad x = 50.3°$$

$$\cos y = \frac{5}{6.5} \quad \Rightarrow \quad y = 39.7°$$

知多一點點

以上例題要求我們找出反正弦的數值。反正弦的表達方法是：

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{5}{6.5}\right) = 50.3°$$

符號 $\sin^{-1}$ 的意思就是反正弦。注意：$\sin^{-1} x$ 並不等於 $\frac{1}{\sin x}$ 。

用計算機求 x 時，可按 SHIFT + $\boxed{\sin}$ 。

其餘兩個反三角函數的符號如下：

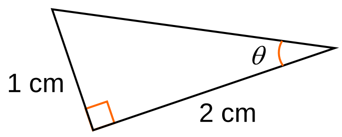
反餘弦：　$\cos^{-1}$

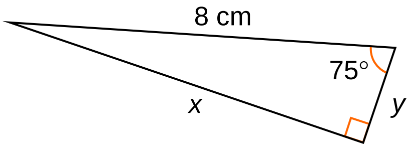
反正切：　$\tan^{-1}$

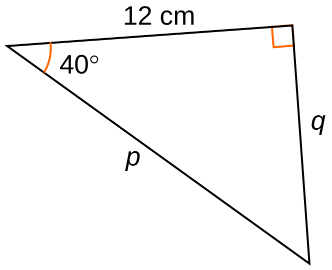
以下有更多求直角三角形中未知角或未知邊長的例子。

例 題

找出下列各圖中的未知數。

(a) 

(b) 

(c) 

題 解

(a) $\tan\theta = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 26.6°$

(b) $\sin 75° = \dfrac{x}{8} \quad \Rightarrow \quad x = 8\sin 75° = 7.73\text{ cm}$

$\cos 75° = \dfrac{y}{8} \quad \Rightarrow \quad y = 8\cos 75° = 2.07\text{ cm}$

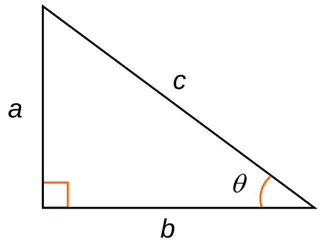
(c) $\cos 40° = \dfrac{12}{p} \quad \Rightarrow \quad p = \dfrac{12}{\cos 40°} = 15.7\text{ cm}$

$\tan 40° = \dfrac{q}{12} \quad \Rightarrow \quad q = 12\tan 40° = 10.1\text{ cm}$

在直角三角形中，$a < c$ 和 $b < c$。因此，

$\sin\theta = \dfrac{a}{c} < 1$

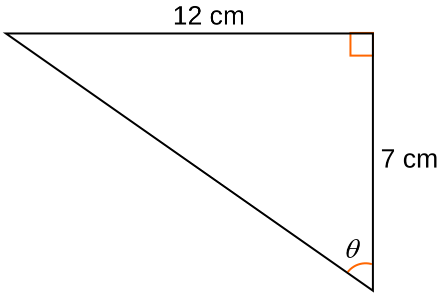
$\cos\theta = \dfrac{b}{c} < 1$



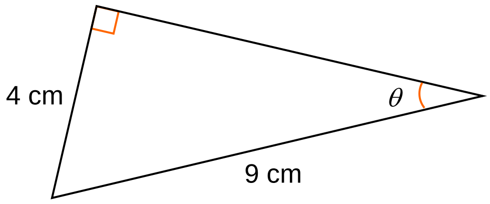
練 習 2

1 試找出下列各直角三角形的 **(i)** sin θ、**(ii)** cos θ 和 **(iii)** tan θ。

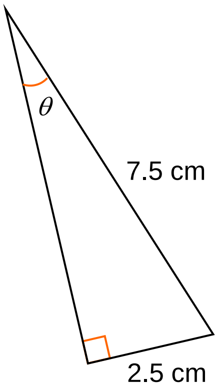
(a)



(b)



(c)



2 用計算機找出以下數值。

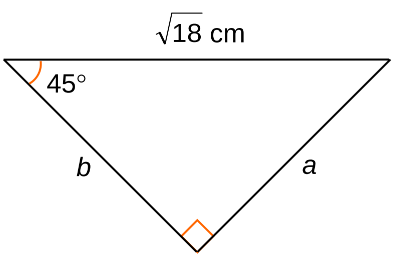
(a) **(i)** sin 45° **(ii)** cos 45° **(iii)** tan 45°

(b) **(i)** sin 75° **(ii)** cos 75° **(iii)** tan 75°

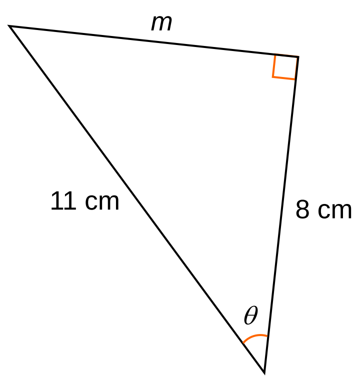
(c) **(i)** $\sin^{-1} 0.25$ **(ii)** $\cos^{-1} 0.5$ **(iii)** $\tan^{-1} 1.25$

3 試找出下列各直角三角形中的未知數。

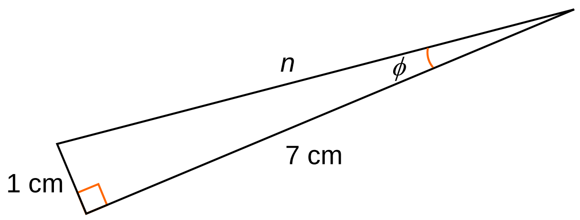
(a)



(b)



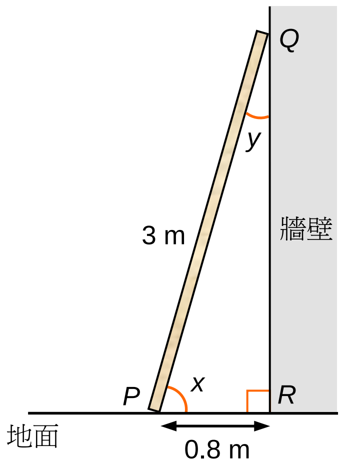
(c)



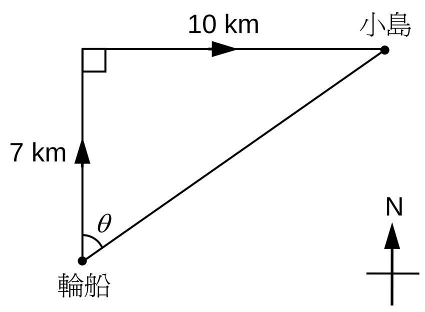
4 長度爲 3 m 的梯子斜放在水平地面上，並靠在垂直牆壁上。梯子底部 *P* 距離牆壁 0.8 m。

(a) 梯子頂端 *Q* 的高度是多少？

(b) 求角 *x* 和 *y*。

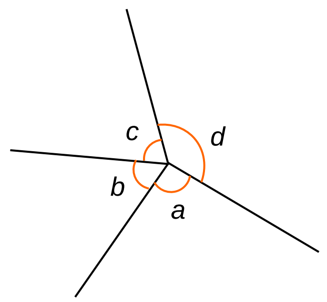
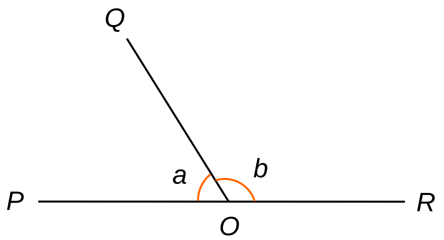
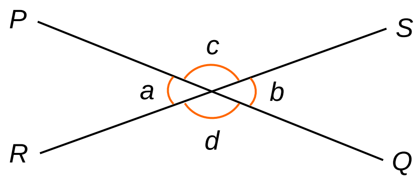
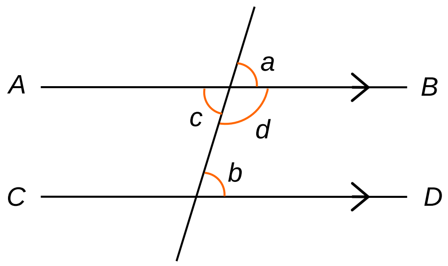


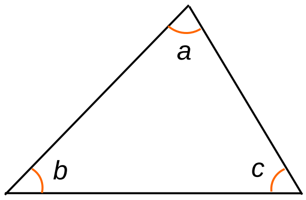
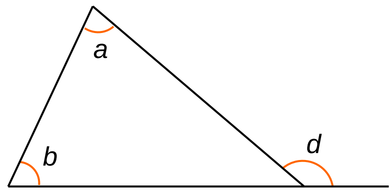
5 一艘輪船向北方航行 7 km，再向東方航行 10 km 後到達小島。求輪船的總位移。



C 用幾何學找出角的大小

下列一些幾何學常用的性質，可以用來找出角的大小。

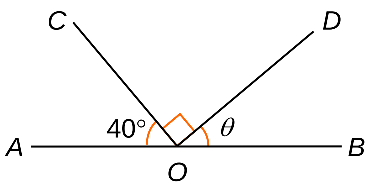
性 質	例 子
同頂角 同頂角之和爲 360°。	 $a + b + c + d = 360°$　　（同頂角）
直線上的鄰角 直線上的鄰角之和爲 180°。	 $a + b = 180°$　　（直線上的鄰角）
對頂角 兩條直線相交時所形成的對頂角相等。	 $a = b$　　（對頂角） $c = d$　　（對頂角）
考慮一條直線穿過兩條平行線（*AB* 和 *CD*）的情況。 **同位角，*AB* // *CD*** 同位角相等。 **內錯角，*AB* // *CD*** 內錯角相等。 **同旁內角，*AB* // *CD*** 同旁內角之和爲 180°。	 $a = b$　　（同位角，*AB* // *CD*） $b = c$　　（內錯角，*AB* // *CD*） $b + d = 180°$　　（同旁內角，*AB* // *CD*）

△內角和 三角形的內角和是 180°。	 $a + b + c = 180°$　（△內角和）
△外角 三角形的外角等於它的兩個內對角之和。	 $d = a + b$　（△外角）

例題

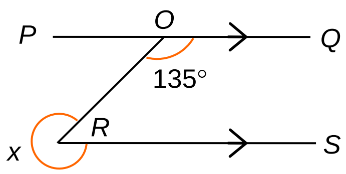
求下列各圖中的未知角。

(a)



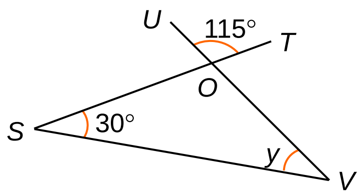
AOB 是直線。

(b)



POQ 是直線。

(c)



SOT 和 *UOV* 是直線。

題解

(a) $40° + 90° + \theta = 180°$　（直線上的鄰角）

$\theta = 50°$

(b) $135° + \angle ORS = 180°$　（同旁內角，PQ // RS）

$\angle ORS = 45°$

$\angle ORS + x = 360°$　（同頂角）

$45° + x = 360°$

$x = 315°$

(c) $\angle SOV = 115°$　（對頂角）

$30° + \angle SOV + y = 180°$　（△內角和）

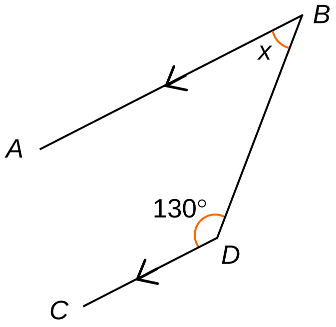
$30° + 115° + y = 180°$

$y = 35°$

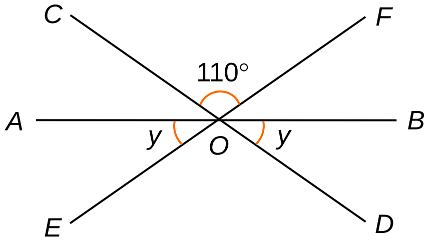
練習 3

1 求下列各圖中的未知角。

(a)

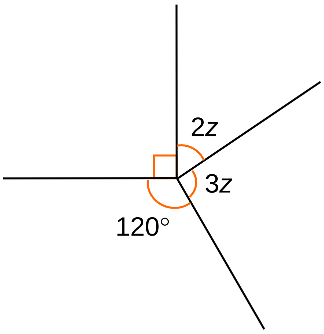


(b)

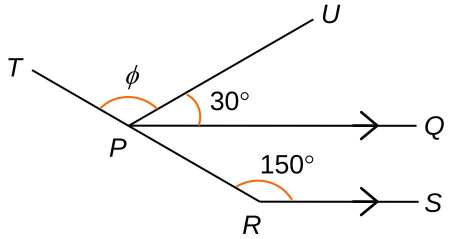


AOB、*COD* 和 *EOF* 是直線。

(c)

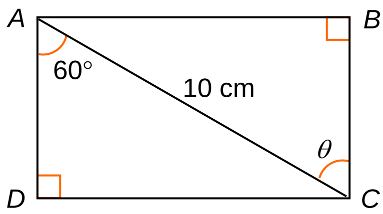


(d)



TPR 是直線。

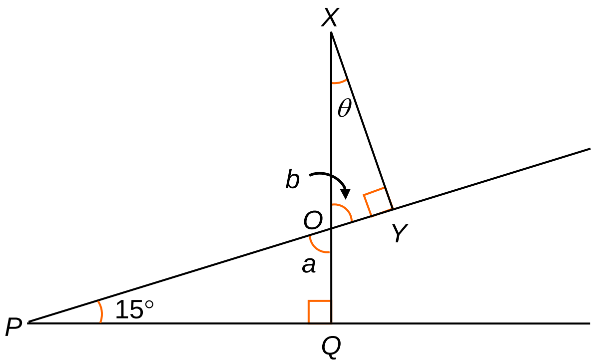
2 下圖中，*ABCD* 是一個長方形。



(a) 求 *CD*。

(b) 求 θ。據此，求 *BC*。

3 參考下圖。



(a) 在下列空格填上答案，以證明 $\theta = 15°$。

在△*OPQ* 中，

$15° + a + 90° =$ _________　　（△內角和）

$a =$ _________

另外，$b = a =$ _________　　（____________________________）

在△*OXY* 中，

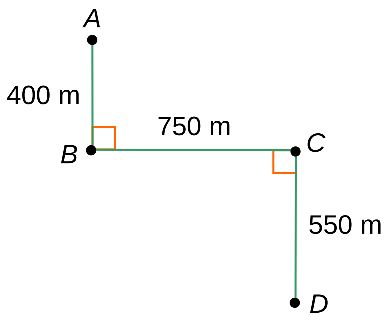
$\theta + b + 90° = 180°$　　（____________________________）

$\theta +$ _________ $+ 90° = 180°$

$\theta =$ _________

(b) 已知 $OX = 10$ cm，求 *OY* 和 *XY*。

4 定向越野賽中，家欣從起點 A 出發，經過檢查站 B 和 C，最後到達檢查站 D。



(a) 求起點 A 和檢查站 D 的最短距離。

(b) 找出 D 相對於 A 的方向。答案以象限角來表示。

答案

練習 1

1 **(a)** 6.8 cm

(b) 2.01 cm

(c) 4.00 cm

(d) 15.0 cm

練習 2

1 **(a)** **(i)** 0.864

(ii) 0.504

(iii) 1.71

(b) **(i)** 0.444

(ii) 0.896

(iii) 0.496

(c) **(i)** 0.333

(ii) 0.943

(iii) 0.354

2 **(a)** **(i)** 0.707 **(ii)** 0.707 **(iii)** 1

(b) **(i)** 0.966 **(ii)** 0.259 **(iii)** 3.73

(c) **(i)** 14.5° **(ii)** 60° **(iii)** 51.3°

3 **(a)** $a = 3$ cm、$b = 3$ cm

(b) $m = 7.55$ cm、$\theta = 43.3°$

(c) $\phi = 8.13°$、$n = 7.07$ cm

4 **(a)** 2.89 m

(b) $x = 74.5°$、$y = 15.5°$

5 12.2 km (N55.0°E)

練習 3

1 **(a)** 50°

(b) 35°

(c) 30°

(d) 120°

2 **(a)** 8.66 cm

(b) 60°、5 cm

3 **(a)** 在△OPQ 中，

$15° + a + 90° = 180°$ （△內角和）

$a = 75°$

另外，$b = a = 75°$ （對頂角）

在△OXY 中，

$\theta + b + 90° = 180°$ （△內角和）

$\theta + 75° + 90° = 180°$

$\theta = 15°$

(b) $OY = 2.59$ cm、$XY = 9.66$ cm

4 **(a)** 1210 m

(b) S38.3°E