

# 香港牛津大學出版社成立60週年 教育領袖論壇

## 跨越未來的數學教育

梁貫成

香港大學 健泰基金教授 (數學教育)

2021年 11月6日



Professor Frederick KS Leung  
The University of Hong Kong

# 引言

- ▶ 論壇主題:「教育的未來」 -- 有前瞻性
- ▶ 面對未來, 我們的學生需要一些什麼知識和技能?
- ▶ 21世紀技能 (21st Century skills)?
- ▶ 論壇似乎聚焦在科技的重要性
- ▶ 論壇的其他內容包括使用數碼科技和工具, 也包括一些關於語文和正向教育等內容
- ▶ 但沒有涉及一些如數學、文學、歷史等傳統學科



# 我們面臨的世界：

## 政治與經濟

- ▶ 經濟全球化、地緣政治、中美關係、歐洲主權債務危機、英國脫歐、(特朗普)保護主義、金磚國家經濟、中國崛起
- ▶ 技術對經濟的影響：自動駕駛汽車、工業機器人、3D打印、網上購物等。

## 環境與社會的問題

- ▶ 全球暖化、能源危機、化石燃料、缺水等等
- ▶ 社交媒體和社交網絡（例如 Twitter、Facebook、YouTube 和 Snapchat 等社交應用程式）
- ▶ 恐怖主義、人口過剩、貧困、LGBT 權利等

對我們孩子的教育有什麼影響？



# 我們應該教導孩子什麼？

“We are currently preparing students for jobs that don't yet exist . . . using technologies that haven't yet been invented . . . in order to solve problems we don't even know are problems yet.”

—Richard Riley, Secretary of Education  
under US President Clinton



# 我們的孩子需要什麼技能？ “21世紀技能”不僅是電腦和 技術，還有：

- ▶ 靈活性和適應能力
- ▶ 全球協作和團隊合作技能
- ▶ 創造力和想像力
- ▶ 批判性思考
- ▶ 解決問題的能力文化意識
- ▶ 信息素養
- ▶ 領導才能
- ▶ 公民素養和公民身份
- ▶ 口頭和書面溝通技巧
- ▶ 社會責任與道德
- ▶ 技術素養
- ▶ 主動性



# 數學能有什麼貢獻?

- ▶ 數學對我們孩子的未來有什麼意義?
- ▶ 我們的孩子應該學習什麼數學來為未來做好準備?
- ▶ 數學科在世界各國的課程都是必修的, 為什麼?

數學教育的宗旨及目標  
作為有學識公民的裝備:

- ▶ 應用於生活
- ▶ 思維訓練
- ▶ 應用於其他學科
- ▶ 人類文化遺產
- ▶ 享受數學



# 數學教育真的能達到這目標?

- ▶ 很多人覺得數學沒有用和沉悶
- ▶ 以下的代數題有什麼用？



Example 4

Simplify

$$\frac{2^{\frac{1}{3}} \div 6^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{9}}$$



Example 4

Simplify

$$\frac{2^{\frac{1}{3}} \div 6^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{9}}$$

Working

$$\text{Expression} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \div (2 \times 3)^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{3}} \div 2^{-\frac{2}{3}} 3^{-\frac{2}{3}}}{(3^2)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{-\frac{2}{3}} 3^{-\frac{2}{3}}} \times \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}}{3^{-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2^1}{3^0} = \frac{2}{1} = 2$$



# 數學教育真的能達到這目標?

- ▶ 很多人覺得數學沒有用和沉悶
- ▶ 以下的代數題有什麼用？
- ▶ 就算是有用的，我們需要在學校學習這些數學內容嗎？
- ▶ 可不可以用應用程式([App](#))代勞？
  
- ▶ 為什麼要學數學？



# 數學是什麼？

1. 數學是一門知識體系
2. 數學是一種思維方式
3. 數學是一種態度

## 1. 數學是一門知識體系

探究「量」與「形」及其規律與關係的學科

數學  $\neq$  計算 (數學  $\supset$  計算)

## 2. 數學是一種思維方式

- ▶ 「準確，精密的思維(與表達)」
- ▶ 學數學的過程 (解題, 証明等) 比數學結果 (代數, 幾何等) 重要
- ▶ 數學的性質: 抽象, 嚴謹



# 數學的應用

- ▶ 數學的應用,是以數學的思維方式和知識體系, 理解和解決問題 -- 數學建模 (modeling)
- ▶ 我們總要以某些方法理解和解決面對的問題 (不可以祇說「我鍾意X」)
- ▶ 建模是系統地理解和解決現實問題的方法
- ▶ 數學建模是以數學模形表達現實世界的某方面, 然後解決這方面的問題
- ▶ 面對同一現實世界的現象, 我們可以用不同的模形來表述它, 以不同的數學方法來理解和解決這現象的問題
- ▶ 在物理學, 以波或以粒子來表述光就是最好說明不同建模的例子



# 例：新肺炎疫情

平均確診數字

今天確診數字是多少？ 確診數字上升抑或下降？

移動平均線 (moving average): 一天?兩天?三天?  
七天?十天?一個月?

假陰性假陽性: 第一型及第二型錯誤 (Type I error versus Type II error)

**Type I and Type II Error**

Null hypothesis is...	True	False
Rejected	<b>Type I error</b> False positive Probability = $\alpha$	<b>Correct decision</b> True positive Probability = $1 - \beta$
Not rejected	<b>Correct decision</b> True negative Probability = $1 - \alpha$	<b>Type II error</b> False negative Probability = $\beta$

# 新冠肺炎疫苗:什麼是疫苗效能?

$$\text{疫苗效能} = \left[ 1 - \frac{\left( \frac{\text{中招人數}}{\text{打疫苗人數}} \right)}{\left( \frac{\text{中招人數}}{\text{打安慰劑人數}} \right)} \right] \times 100\%$$

例：輝瑞藥廠雙盲研究

4,366參加者

三個月後，共170人中招

其中162人打安慰劑，8人打疫苗

$$\left( 1 - \frac{8}{162} \right) \times 100\% = 95\%$$



# 我們應該打疫苗嗎？

## 疫苗效能

假設不打疫苗的中招率是 0.74%，死亡率是 0.013%；疫苗效能是 95%：

**X** 疫苗效能 95%，如果全港 7,000,000 人都打疫苗那麼三個月內就會有 350,000 人中招！  
**X**

如果全香港人都不打疫苗的話(假設不打疫苗的中招率是 0.74%)，就會有 51,800 人中招 ( $7,000,000 \times 0.74\%$ )。但如果全香港 7,000,000 人都打疫苗的話，就只會有 2,590 人中招。即是三個月內 99.96% 的人受保護



# 我們應該打疫苗嗎？

## 疫苗副作用

美國在疫苗接種首個月，有13,794,904人接種輝瑞藥廠的疫苗，其中640人有嚴重副作用(0.0046%)，113人死亡(0.00082%)，其中8人是住在老人院。

如此推算，如果全香港7,000,000人都打復必泰疫苗，估計會有57人死亡(其中4人是住在老人院)。但是如果全港市民都不打疫苗的話，預計將會有922人死亡(7,000,000 x 0.013%)



# 幾何

為什麼要學幾何？

為什麼要學習證明幾何定理？

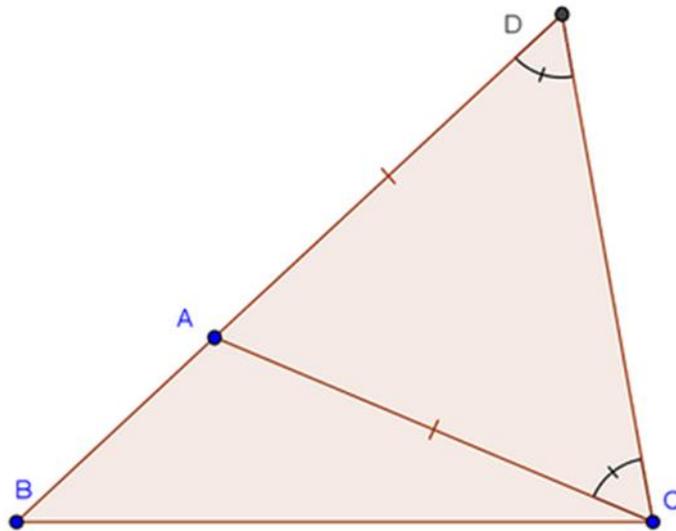
幾何定理有用嗎？

讓我們看看以下的幾何定理及其證明



# Theorem: The sum of any two sides of a triangle is greater than the third side.

## Proof



For a  $\triangle ABC$ , extend BA to a point D such that  $DA=CA$ .

$\triangle ACD$  is an isosceles triangle

$\therefore \angle ADC = \angle ACD$ , and so  
 $\angle BCD > \angle BDC$

$\therefore BD > BC$

Since  $BD=BA+AD$  and  $AD=AC$   
Thus,  $BA+AC > BC$

A similar argument shows that  
 $AC+BC > BA$  and  $BA+BC > AC$ .



# 幾何證明

我們從這幾何證明題學到什麼？  
三角形任意兩條邊之和大於第三條邊 這結果不是顯而易見麼？

為什麼要學幾何？

「人生在世有幾何？何必苦苦學幾何？  
學了幾何能幾何？不學幾何又幾何？」

為什麼要學習證明幾何命題？

2. 數學是一種思維方式

「抽象,嚴謹,準確與精密的思維(與表達)」

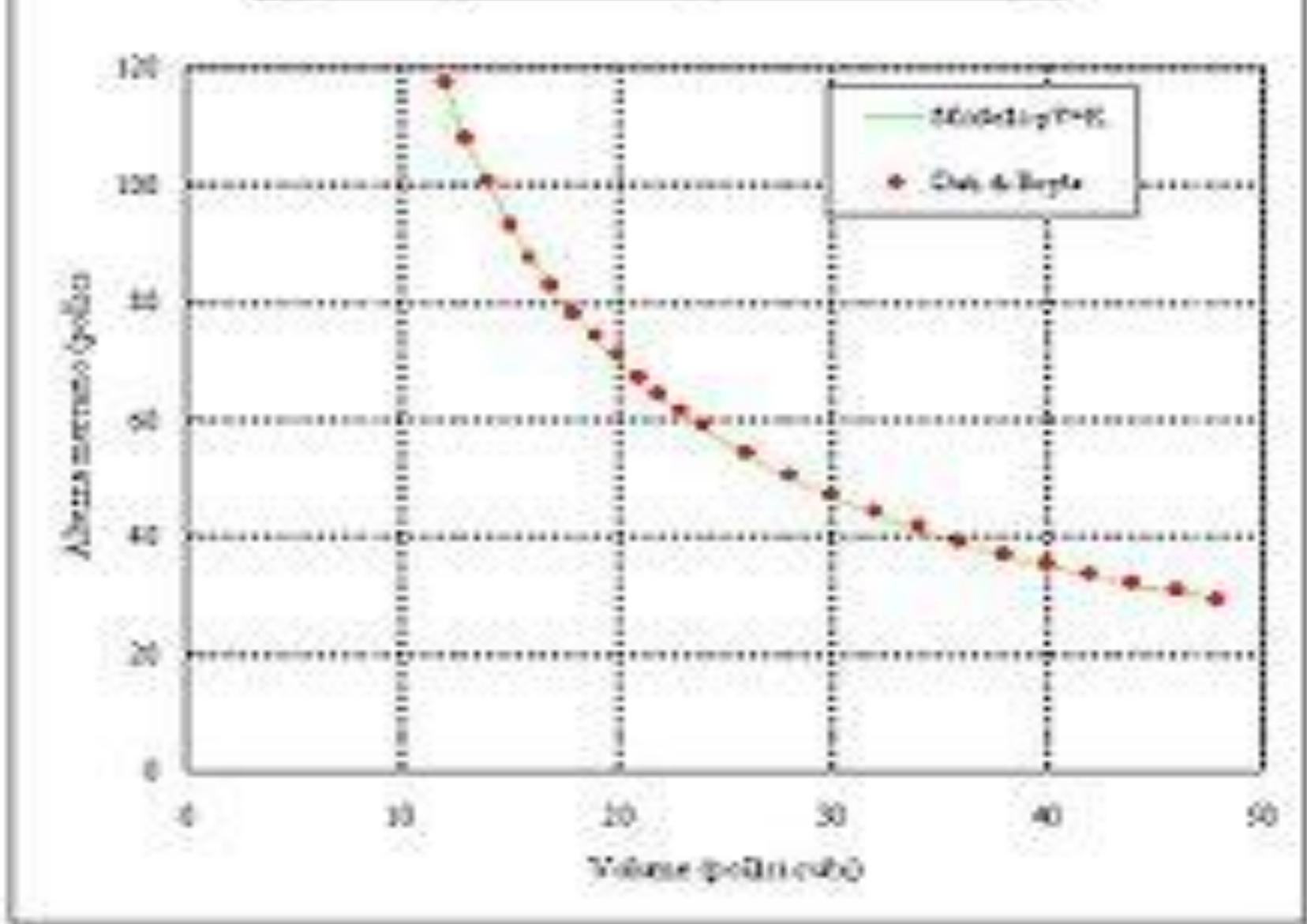


# 數學思維與自然科學思維方式的分別

- ▶ 演繹推理與證明
- ▶ 例: 波義耳定律 (Boyle's law) - 在定量定溫下，理想氣體的體積與氣體的壓力成反比。
- ▶ 由英國化學家波義耳 (Boyle)，在1662年根據實驗結果提出：“在密閉容器中的定量氣體，在恒溫下，氣體的壓力和體積成反比關係。”
- ▶ 公式  $P_1 * V_1 = P_2 * V_2$
- ▶ 波義耳定律 被稱為是人類歷史上第一個被發現的“定律”。



Diagramma p-V dei dati originali di Robert Boyle



例:  $1+1141x^2$  可以是平方數嗎( $x$  是正整數)?

$x$	$1+1141x^2$	$\sqrt{1+1141x^2}$
1	1142	33.79...
2	4565	67.56...
3	10270	101.34
4	18257	135.11
5	28526	168.89
·	·	·
·	·	·
100	11410001	3377.86
·	·	·
·	·	·
10000	114100000001	337786.91

最小的平方數是：

$$1+1141 \times 30\,693\,385\,322\,765\,657\,197\,397\,208^2$$

$$= 1\,036\,782\,394\,157\,223\,963\,237\,125\,215^2$$



# 證明與驗證

- ▶ 證明與驗證有很大的分別
- ▶ 證明是一種邏輯推理，而驗證是一種歸納方法
- ▶ 科學方法：(1) 觀察自然現象 (2) 作假設；(3) 設計實驗、搜集資料；(4) 歸納結果、作出結論
- ▶ 與數學證明完全不同
- ▶ 證明與歸納在確定(命題的)真確性上有很大的分別

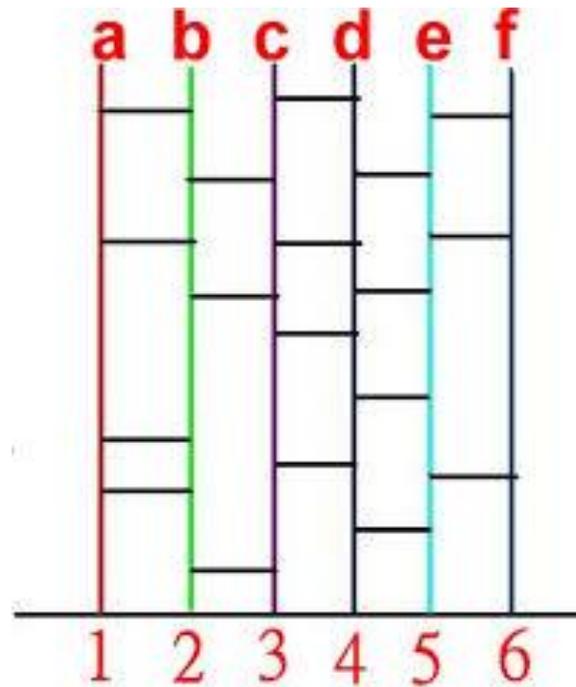
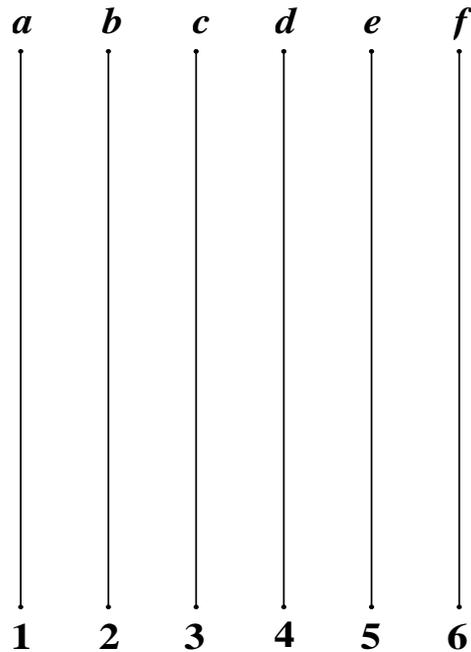
人類知識來源：

- ▶ 經驗
- ▶ 學習
- ▶ 推理



# 畫鬼腳的證明

畫鬼腳一定是一對一麼？（即，不管橫線怎麼給，最終還是  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  對應 1、2、3、4 各一個？）可否作出證明？





# 數學推理的應用

例如：

菱形是一種平行四邊形

正方形是菱形

所以，正方形是一種平行四邊形

三段論推理

所有人都會死，

蘇格拉底是人。

因此，蘇格拉底會死。

--亞里士多德



# 下面的推理正確嗎？

阿媽係女人  
小明的媽媽叫娥姐  
所以，娥姐係女人？

我爸是男人  
陳大文是男人  
所以，陳大文是我爸？



# 福爾摩斯的故事

“Silver Blaze” Sherlock Holmes (Doyle, 1892)

► A mystery about the disappearance of a famous racehorse the night before a race and the murder of the horse’s trainer.

*Gregory (Scotland Yard detective): “Is there any other point to which you would wish to draw my attention?”*

*Holmes: “To the curious incident of the dog in the night-time.”*

*Gregory: “The dog did nothing in the night-time.”*

*Holmes: “That was the curious incident.”*



No one that Sherlock Holmes spoke to in his investigation remarked that they had heard barking from the watchdog during the night when the horse was stolen.

This led Homes to conclude that the evildoer was a not a stranger, but someone the dog recognized and thus would not cause him to bark

The reasoning behind:

- ▶ Suppose a stranger stole the racehorse
- ▶ Then the dog should have barked
- ▶ The dog didn't bark
- ▶ Therefore the evildoer is not a stranger
- ▶ He/she must be someone the dog recognized



# 數學推理的應用

「錢財如糞土，仁義值千金」

所以，仁義是糞土？

「有錢人的太太都是漂亮的」

1. 小珠很漂亮，所以小珠是有錢人的太太？
2. 大強是窮人，所以他的太太不漂亮？

「受過教育的人不會粗言穢語」

1. 李先生粗言穢語，所以他不是受過教育的人？
2. 王先生沒有受過教育，所以王先生粗言穢語？



# 你有沒有後悔參加這講座?

「梁貫成的講座很沉悶」

聰明的人不會參加沉悶的講座

張先生參加梁貫成的講座

所以張先生不是聰明人?

「參加梁貫成的講座有很多漂亮的女士」

何小姐參加梁貫成的講座

所以何小姐很漂亮?

梁貫成的太太沒有參加她丈夫的講座

所以梁貫成的太太樣子很醜陋?



### 3. 數學是一種態度

1. 數學是一門知識體系
2. 數學是一種思維方式
3. 數學是一種態度

▶徐光啟論《幾何原本》：「此書為益，能令學理者祛其浮氣，練其精心，學事者資其定法，發其巧思，故舉世無一人不當學……故學此者不止增才，亦德基也」\*

▶數學是求真、講理的，不是「我說了算」

▶我們有傑出的數學家，但數學沒有權威人士，權威在於數學的「理」，而不是數學大師的威信

\*Xu Guang-qi (1984), *Xu Guang Qi Ji* [徐光啟集 Collected Writings of XU Guang-qi], edited by C. M. Wang, Shanghai: Shanghai Antique Books Publishing. Vol. 1. pp. 76-78. (in Chinese)



# 「數學...沒有所謂權威」

2021年東京奧運單車公路賽金牌得主奧地利單車手Anna Kiesenhofer是一位數學家。她的表現出乎所有人的意料。Dr Kiesenhofer 將比賽視作解決問題的過程，有如解決一個數學問題。當被問及她會給一個剛開始從事這項運動的年輕單車手什麼建議時，她說：「不要太相信權威」。

「在數學教學中，給學生傳達這種反權威態度是重要的... 數學有理可循，所以是能理解。數學工作者當中不乏博學深思之士，但沒有所謂權威。數學不是一人說了算，不是信口開河，而是以理服人。探索期間大可天馬行空，任憑想像力和創作力翱翔天際；一旦作出斷言，便得有根有據，不能馬虎，更不要試圖蒙混過關。」

蕭文強教授(2021年10月)



# 對數學教育的含義

面對未來，我們的學生和孩子需要學習什麼數學知識和技能？

對數學教育有以下兩個含義：

1. 學什麼數學？
2. 怎樣學數學？

需要強調的是過程而不只是是結果

數學是一種態度而不只是是技能



# 我們應該如何學習數學？

## 1. 反思的重要性

「學而不思則罔」 《論語·為政》

問問你的孩子—理由比答案更重要

(“為什麼?”, “你是怎麼得到這個答案的?”, “有沒有另一種解決問題的方法?”)

元認知 (梁貫成: 你在做甚麼?)

怎樣解題? (波利亞) (How to Solve It?, Polya)

解題的四個步驟

(1)弄清問題 (2)擬定計劃 (3) 實現計劃 (4)回顧



## 2. 學習態度和學習習慣非常重要

過程比答案更重要

「固本培元」抑或 即食文化?

能夠專注於一項任務，一絲不苟；堅持、毅力、認真、小心、抽離

## 3. 數學交流

- ▶ 孩子要多「講數」-談數學
- ▶ 告訴我”，解釋”，提問”



## 4. 培養孩子對數學的興趣

「知之者不如好之者，好之者不如樂之者。」 《論語·雍也第六》

先培養好奇心，留意周圍與數學有關的事物

為甚麼？你如何知道？有何分別？大概多少？  
多給孩子空間

## 5. 最重要是求真的態度



# 數學對我們的未來有什麼貢獻？

- ▶ 在個人層面，數學的思考過程（例如批判性思維）幫助我們理解和應對未來的問題
- ▶ 在全球層面，數學是STEM的基礎：數學的結果和過程都很重要
- ▶ 雖然大部份數學在狹義上來說在日常生活中是沒有用的
- ▶ 但嚴謹的思維和清晰的溝通在生活中極為重要
- ▶ 更重要的是，數學是一種思考方法，是一種求真的態度，數學也是人類智慧的結晶
- ▶ 所以對我們的孩子來說，論事今天或是未來數學是最重要最有用的學科之一



# 超越數學以外

- ▶ 21世紀數學不僅僅是為經濟作出貢獻
- ▶ 不只是為了“安定繁榮”，不只是為了“繼續馬照跑舞照跳”
- ▶ 我們要學會欣賞真善美
- ▶ 提倡STEAM 的重要性，而不僅僅是 STEM
- ▶ 最重要的是，我們需要學會珍惜人與人之間的關係



*For the beauty of the earth*  
For the *beauty of the skies*  
For the love which from our birth  
Over and around us lies

For the beauty of the hour  
Of the day and of the night  
*Hill and vale and tree and flower*  
Sun and moon and stars of light

For the joy of *human love*  
*Brother, sister, parent, child*  
*Friends* on earth and friends above  
For all *gentle thoughts and mild*

Refrain

Lord of all, to  
thee we raise  
This our joyful  
hymn of praise



# 結語

- ▶ 數學，尤其是其過程和數學態度，對孩子的現在和未來都非常重要
- ▶ 但“beauty; human love of brother, sister, parent, child and friends; and gentle and mild thoughts”對我們孩子的未來也非常重要
- ▶ 我們要教育我們的孩子去欣賞數學之美，而不僅僅是數學的運用
- ▶ 數學不是孩子生命的全部
- ▶ 就我們孩子的未來而言，人生還有很多其他重要的領域！





# 謝謝!

我的電郵:

**frederickleung@hku.hk**