

DSE 2012 - 2023 卷一統計分析

DSE 2023 卷一考核課題概覽	p.3-5
甲部 (1) Section A(1)	p.3
甲部 (2) Section A(2)	p.4
乙部 Section B	p.5

DSE 2012 - 2023 卷一考核課題分數分佈	p.6-11
甲部 (1) Section A(1)	p.6-7
甲部 (2) Section A(2)	p.8
乙部 Section B	p.9
按範疇	p.10
按初中、高中	p.11
解釋題	p.11

DSE 2012 - 2023 卷二統計分析

DSE 2012 - 2023 卷二考核課題分佈	p.12-13
按範疇	p.12
按初中、高中.....	p.13

DSE 2023 卷一分析..... p.14-21

總括分析 p.14

個別題目分析 p.15-20

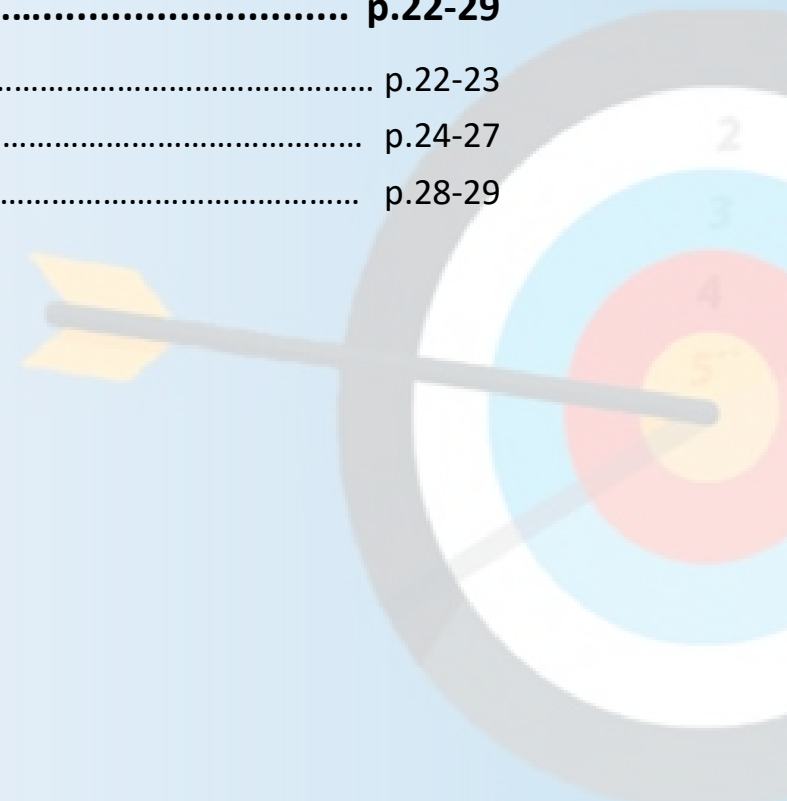
結語 p.21

DSE 2023 卷二分析..... p.22-29

總括分析 p.22-23

個別題目分析 p.24-27

結語 p.28-29



DSE 2012 - 2023 卷一統計分析

DSE 2023 卷一考核課題概覽

甲部 (1) Section A(1)

DSE 2023 甲部 (1)	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9
數與代數 Number and Algebra	主項變換 (3)	指數定律 (3)	誤差與估算 (3)	複合不等式 (及) (4)	百分法 (解方程) (4)	率及比 (4)			
度量、圖形與空間 Measures, Shape and Space							平面幾何 (圓) (4)	平面幾何 (相似三角形、畢氏定理) (5)	
數據處理 Data Handling									簡易概率 + 集中趨勢的 度量 + 離差的 度量 (5)

DSE 2023 卷一考核課題概覽

甲部 (2) Section A(2)

DSE 2023 甲部 (2)	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14
數與代數 Number and Algebra			(a) 部分變 + 二次函數 (3)	(a) 多項式的除法 + 除法算式 (3) (b) 根的性質 (有理根) (4)	
度量、圖形與空間 Measures, Shape and Space	(a) 軌跡 (1) (b) 直線方程 + 圓方程 (5)		(b) 圓的性質 + 圓周 (4)		(a) 圓錐曲面面積 (3) (b) 平截頭體曲面 面積及體積 + 球體體積 (5)
數據處理 Data Handling		離差的度量 (7)			

DSE 2023 卷一考核課題概覽

乙部 Section B

DSE 2023 甲部 (2)	Q15	Q16	Q17	Q18	Q19
數與代數 Number and Algebra		(a) 二次方程兩根 之和及積 (2)		(a) 等比數列 + 對數性質 (3) (b) 等差數列 + 對數性質 (5)	
度量、圖形與空間 Measures, Shape and Space		(b) 圓的方程 (交點) + 內分點 (3)	(a) 正弦公式 (2) (b) 兩個平面的交角 + 三角形的外心 + 圓的性質 (4)		(a) 三角形的外心 及垂心 (5) (b) 三角學與斜率 + 三角形的內心 + 三角形面積比 (7)
數據處理 Data Handling	組合 + 高中概率 (4)				

DSE 2012 - 2023 卷一考核課題分數分佈

甲部 (1) Section A(1)

課題 Topic	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
指數定律 Laws of Indices	3	3	3	3	3	3	3		3	3	3	3
主項變換 Change of Subject	3	3	4	3	3	3	3	3		3		3
因式分解 Factorization	3	3	3	4	4	3	4	4	3	3	4	
代數分式 Algebraic Fractions					3			3			3	
複合不等式 Compound Inequality	4	4		4	4	4	4	4	4	4	4	4
聯立方程 Simultaneous Equations	4	4		4		4	5	4		4	3	
二次方程 Quadratic Equations								3	5			
百分法 Percentages	4		4	4	4		5	4	4	4	4	4
誤差與估算 Errors and Approximation		5	3			5	3		3			3

DSE 2012 - 2023 卷一考核課題分數分佈

甲部 (1) Section A(1)

課題 Topic	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
續多項式 More about Polynomials			5									
率及比 Rates and Ratios			5									4
變分 Variations					5	5						
求積法 Mensuration	5			5				5				
平面幾何 Plane Geometry	5	4	5	5			5		5	5	5	4 + 5
坐標幾何及變換 Coordinate Geometry and Transformation		4	5		4	4				4	4	
簡易概率 Basic Probability				3	2	2	3	2			2	2
統計 Statistics	4	5	3		3	2		3	5	5	3	3

DSE 2012 - 2023 卷一考核課題分數分佈

甲部 (2) Section A(2)

課題 Topic	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
續多項式 More about Polynomials	7	7		6	10	8	7	6	8	7	8	7
變分 Variations	6	6	8	6				5	6	6	6	3
求積法 Mensuration	7	7	8		6	7	9		6	8	7	8
平面幾何 Plane Geometry				7	7	6	8	8 + 8				4
圓的方程 / 軌跡 Equations of Circles and Locus	9	9	7	9	5	7			9	7	7	6
行程圖 Travel Graphs			6									
統計 / 簡易概率 Statistics and Basic Probability	6	6	6	7	7	7	5 + 6	8	6	7	7	7

DSE 2012 - 2023 卷一考核課題分數分佈

乙部 Section B

課題 Topic	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
兩根之和及積 / 配方法 / 函數變換 Sum and Product of Roots / Completing Square / Transformation of Functions		6		9	6	8	8	5	6	3	5	2
等差 / 等比數列 Arithmetic Sequences / Geometric Sequences	13	13	4	5	5	4	5	6	5	7	7	8
三角學的應用 Application of Trigonometry	8	8	7	13	6	13	7	7	12	7	7	6
圓的方程 / 圓的切線 / 四心 Equations of Circles / Tangents of Circles / Four Centres	7				12		12	7 + 7	7	9	12	3 + 12
對數變換 Logarithmic Transformation			3			4						
線性規畫 Linear Programming			8							5		
排列與組合 / 概率 Permutation and Combination / Probability	4	4	13	4	3	6	3	3	5	4	4	4
統計 Statistics	3	4		4	3							

DSE 2012 - 2023 卷一考核課題分數分佈

按範疇

範疇 Strand	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
數與代數 Number and Algebra	47	54	45	48	47	51	47	47	46	49	47	41
度量、圖形與空間 Measures, Shape and Space	41	32	32	39	40	37	41	42	43	40	42	48
數據處理 Data Handling	17	19	22	18	18	17	17	16	16	16	16	16
數學的進一步應用 Further Application of Mathematics			6									

DSE 2012 - 2023 卷一考核課題分數分佈

按初中、高中

初中 / 高中 Junior / Senior Topics	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
初中 Junior Topics	35	39	35	33	39	33	49	36	27	41	38	30
高中 Senior Topics	70	66	70	72	66	72	56	69	78	64	67	75*

* Q9 涉及分佈域 (Range) 的概念，故歸類為高中題目。

解釋題分佈

	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
分部數目 No. of parts	10	7	9	7	7	5	6	5	6	8	6	6
總分 Total marks	24	19	29	19	24	12	18	15	21	18	17	18

DSE 2012 - 2023 卷二統計分析

DSE 2012 - 2023 卷二考核課題分佈

按範疇

範疇 Strand		2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
數與代數 Number and Algebra	甲部	14	13	14	14	14	13	13	14	13	14	14	14
	乙部	8	8	8	7	6	7	7	6	7	6	7	7
度量、圖形與空間 Measures, Shape and Space	甲部	12	12	12	12	13	14	14	13	14	13	13	13
	乙部	4	5	4	5	5	4	4	5	4	5	4	4
數據處理 Data Handling	甲部	4	5	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3
	乙部	3	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4

DSE 2012 - 2023 卷二考核課題分佈

按初中、高中

初中 / 高中 Junior / Senior Topics		2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
初中 Junior Topics	甲部	19	18	18	19	21	18	18	18	19	19	18	18
	乙部	1	1	1	1	1	1	0	2	1	2	1	1
高中 Senior Topics	甲部	11	12	12	11	9	12	12	12	11	11	12	12*
	乙部	14	14	14	14	14	14	15	13	14	13	14	14

* Q16 涉及初中求積法的技巧，但亦使用了圓心至弦中點的連線 $\perp$ 弦 (line joining centre to mid-pt. of chord $\perp$ chord) 此性質，故歸類為高中題目；

Q17 涉及初中求積法的技巧，但亦使用了解二次方程 (Quadratic Equations) 的技巧，故歸類為高中題目。

DSE 2023 卷一分析

盧偉業老師
聖公會呂明才中學
數學科主任兼創科統籌主任

總括分析：

與歷屆試題的相似點

1. 初中和高中題目分數分佈與往年相若，比例大約是 1 : 2。
2. 解釋題數量 (今年是 6 題) 與往年 (約 6–8 題) 相若。
3. 以範疇分類，「數與代數」、「度量、圖形與空間」的題目佔分較多，各約佔總分的 40–45%，而「數據處理」的題目佔分較少，約佔總分的 15–20%。
4. 續多項式 (More about Polynomials)、變分 (Variations)、求積法 (Mensuration) 這些甲部 (2) 「常客」繼續出現。
5. 排列與組合 (Permutation and Combination) / 概率 (Probability) 在乙部穩佔一題，留意今年題目較往年略複雜。

與歷屆試題的相異點

1. 甲部 (1) 「五大初中基礎題」中，指數定律 (Laws of Indices)、主項變換 (Change of Subject) 和百分法 (Percentages) 繼續出現，但因式分解 (Factorization) 和聯立方程 (Simultaneous Equations) 則未有出現。
2. 今年有關圓的方程 (Equations of Circles) 或坐標幾何中圓的性質的題目較往年分散 (Q10, Q12, Q16，散佈在 3 條不同的問題)。
3. 續多項式 (More about Polynomials) 的難度逐年增加，由以往多項式的除式的次數是 1，接着到除式的次數是 2，到今年除式的次數是 3，反映加強考核考生對多項式的除法算式 (Division Algorithm) 的理解。
4. 等差數列 (Arithmetic Sequences) 和等比數列 (Geometric Sequences) 由 2012–2013 年的長題目，至 2014–2020 年變成短題目 (佔 4–6 分)，近年佔分開始回升 (佔 7–8 分)，當中要求考生的解難技術比往年多，包括涉及一元二次不等式 (Quadratic Inequality in One Unknown)、二次方程兩根之和 (Sum of Roots) 及兩根之積 (Product of Roots)，甚至轉換對數的底 (Change of Base of Logarithm)。
5. 有關三角形的四心 (Centres of Triangles) 的題目是近年長題目的主力，例如有可能結合二次函數及函數變換，而近兩年則配合坐標幾何的直線方程和圓的方程出題，當中牽涉的運算比較複雜，考生要熟悉四心在平面幾何上的特性和在坐標幾何上的意義才能加快運算速度。這類題目對大部分考生來說實屬不易。
6. 今年沒有考核配方法 (Method of Completing the Square) 和函數變換 (Transformations of Functions)，比較令人意外。

個別題目分析：

Q2

$$\frac{x^{-8}y}{(x^7y^9)^{-6}} = \frac{x^{-8}y^1}{x^{-42}y^{-54}} \quad \text{1M 給 } (a^m b^n)^k = a^{mk} b^{nk}$$

$$= x^{-8-(-42)} y^{1-(-54)} \quad \text{1M 給 } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ 或 } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$= x^{34} y^{55} \quad \text{1A}$$

留意 $y = y^1$

常犯錯誤：

- 當作 $y = y^0$

Q3

250 包普通裝芝士的最小重量

留意最大誤差 $= \frac{1}{2} \times \frac{10}{1000} \text{ kg}$ (單位為 kg)

$$= (0.22 - 0.005)(250) \text{ kg} \quad \text{1M + 1M}$$

$$= 53.75 \text{ kg}$$

$$> 53.6 \text{ kg}$$

解釋題一定要清楚比較數值

該宣稱不正確。

1A

常犯錯誤：

- 利用 250 包普通裝芝士的最大重量作比較。
- 沒有進行單位轉換。
- 沒有寫出單位 (g 還是 kg)。

Q6

(a) $a : b = 6 : 7$

設 $a = 6k$ 和 $b = 7k$ 。

$$\frac{4a - 3c}{2b - c} = 9$$

$$\frac{4(6k) - 3c}{2(14k) - c} = 9 \quad \text{1M}$$

$$c = 17k$$

$$a : b : c = 6 : 7 : 17 \quad \text{1A}$$

(b) $\frac{5a + 8b}{7b + 3c}$

$$= \frac{5(6k) + 8(7k)}{7(7k) + 3(17k)} \quad \text{1M}$$

$$= \frac{86k}{100k}$$

$$= \frac{43}{50} \quad \text{1A}$$

常犯錯誤：

誤把 $a = 6$ 和 $b = 7$ 代入數式。

Q8

(b) $\therefore$

$$AC^2 = 10^2 = 100$$

$$AE^2 + CE^2 = 8^2 + 7^2 = 113 \neq 100$$

$\therefore \triangle ACE$ 不是直角三角形

$\therefore \triangle BDE$ 不是直角三角形

常犯錯誤：

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 \text{ (畢氏定理) } \leftarrow \text{這個寫法是不對的。}$$

$$10^2 = 8^2 + 7^2$$

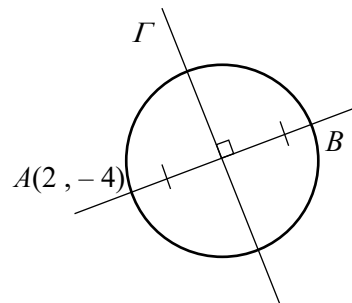
$$100 = 113$$

$\therefore \triangle ACE$ 不是直角三角形。

Q10

- (a) - 如果題目問兩者之間的幾何關係 (Geometric relationship)，答案通常會是一個完整句子，當中要寫出正確的幾何名詞 (例如共線，互相垂直，角平分線等)。
- 考生可能不明白 P 與 A 及 B 等距 的意思，誤以為 P 只是某一個固定點。所以老師在教導學生軌跡課題的時候，要特別留意解釋移動點與固定點的分別。

- (b)(i) - 考生可能會誤以為 Γ 只是穿過 AB 的任意一條直線。
- 老師可提醒考生答案要以 $y = mx + c$ 或 $ax + by + c = 0$ 的形式表示。
(ii) - 如果以 AB 為直徑，那麼 AB 的垂直平分線就會穿過該圓的圓心。
- 某些考生可能會嘗試找出 B 點的坐標，但運算便會較為繁複：



設 $B = (h, k)$

$$AB \text{ 的中點} = \left(\frac{h+2}{2}, \frac{k-4}{2} \right)$$

$$\therefore \begin{cases} (h) - 3(k) - 14 = 0 & (B \text{ 在直線 } AB \text{ 上}) \\ 3\left(\frac{h+2}{2}\right) + \left(\frac{k-4}{2}\right) - 12 = 0 & (AB \text{ 的中點在直線 } \Gamma \text{ 上}) \end{cases}$$

$$(h, k) = (8, -2)$$

$$\text{半徑} = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(8-2)^2 + [-2-(-4)]^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{圓心} = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{-4-2}{2} \right) = (5, -3)$$

$$\text{圓的方程} : (x-5)^2 + (y+3)^2 = 10$$

Q11

- (a) - 利用**平均值 (Mean)** 設立方程來求 n ，相對比較簡單。
 - 考生可能會把擁有計算機的數目當作成學生人數的分佈 (即 1, 2, 3, 4)。
 - 考生可能會誤把**中位數 (Median)** 作為 $\frac{2+3}{2} = 2.5$ ，把**四分位數間距 (Inter-quartile range)** 作為 $\frac{3+4}{2} - \frac{1+2}{2} = 2$ 。
 - 考生可能會把**標準差 (Standard deviation)** 作為答案，留意**方差 (Variance)** 是**標準差的平方**，而**方差**是第一次在文憑試卷一中出現。
- (b) - 有兩名學生退學後，該分佈的**平均值**維持不變，即代表兩位學生擁有計數機的數目可能兩者皆是 2，或一位是 1 而另一位是 3。
 學生要先計算原來的**分佈域**，然後再根據兩個不同的情況分析**新的分佈域**是否有改變。

Q12

- (a) - 相對比較容易。大部分考生都已經過一定程度的操練，對於此類題目應該相當熟悉。唯要留意題目須求 $f(5)$ ，而不是 $f(x)$ 。
- (b) - 要先求出 u 和 v 的值，並要留意 U 、 V 、 W 所形成的是一個直角三角形。
 - 考生可能會錯誤地以圓面積作為答案。

Q13

- (a) - 以往文憑試涉及**多項式除法**的題目，除式的次數是 1 或 2，而這條題目除式的次數是 3。
 - 考生需要熟悉**除法算式 (Division Algorithm)** 才能完成這類題目。
 - 考生需要知道除法算式是恆等式，因此他們可以利用**比較恆等式的同類項**的係數來求解。
- (b) - 考生需要清楚明白當餘式 $r(x)$ 與商式相等時，即代表餘式 $r(x)$ 是 $h(x)$ 的其中一個因式。因 $h(x) = g(x)r(x) + r(x) = r(x)[g(x) + 1]$
 - 考生可能遺漏了 $x = 0$ 是其中一個有理根。
 - 考生可能在用計算機解二次方程而所得出的答案是小數時，便會直接判斷該根是一個無理根，這是不正確的。考生須利用二次公式來求根的真確值。

錯誤寫法：

$$x^2 + 5x - 12 = 0$$

$$x = -6.772 \text{ 0 或 } 1.772 \text{ 0}$$

$\therefore x^2 + 5x - 12 = 0$ 的根是無理數。

正確寫法：

$$x^2 + 5x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$$

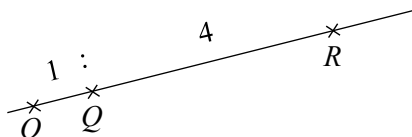
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{2}, \text{ 兩個根都是無理數}$$

Q16

- (a) - 近年乙部 **Section B** 開始加入較多的二次方程的題目，並結合不同的課題。
 - 這類題目比較像會考程度的題目，問法與以往文憑試不同，但這並不代表這類題目難度高，只要熟悉題目問法和解題時入手方法就可以了。
 - 此部分建議運用二次方程的兩根之和 (Sum of Roots) 及兩根之積 (Product of Roots) 處理。若利用二次公式 (Quadratic formula) 計算，運算會變得繁瑣。
 正確寫法：

$$\begin{cases} 5p + p = \frac{-a}{1} \\ 5p(p) = \frac{b}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6p = -a \\ 5p^2 = b \end{cases} \Rightarrow 5\left(\frac{-a}{6}\right)^2 = b \Rightarrow 5a^2 = 36b$$

- (b) - 留意題目已給定 $OQ : QR$ 長度的比例是 $1 : 4$ 。(且 O 位於圓外)



- 留意直線方程和二次方程的聯立方程，其根是兩線交點的坐標。
 - 注意：聯立方程的 x^2 的係數要是 1，才可以利用 (a) 部的結果。
 - 常犯錯誤：

$$\begin{cases} y = mx \\ x^2 + y^2 - 6x - 12y + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow (m^2 + 1)x^2 - (12m + 6)x + 20 = 0$$

$\therefore a = -(12m + 6), b = 20$

Q17

- (a) - 此部分相對比較容易，考生只需利用一次**正弦公式 (Sine Formula)** 便能求得答案。
- 留意會得出兩個 $\angle XWY$ 的值，考生需捨去大於 110° 的值。
- (b) - 留意三條稜 WZ 、 XZ 、 YZ 的長度相等，因此 Z 在平面 WXY 上的投影 P 會是 $\triangle WXY$ 的外接圓的圓心 (即 外心 Circumcentre)，亦即 $PW = PX = PY$ 。
- 留意 $\triangle ZYX$ 是一個等腰三角形，把 XY 的中點記為 M ，則 ZM 與 XY 互相垂直。而 PM 與 XY 互相垂直 (外心的定義)，因此 $\triangle WXY$ 與 $\triangle XYZ$ 之間的交角便是 $\angle ZMP$ 。

常犯錯誤：誤以為 $\triangle WXY$ 與 $\triangle XYZ$ 之間的交角是 $\angle ZMW$ 。

- 留意在 $\triangle WXY$ 中，

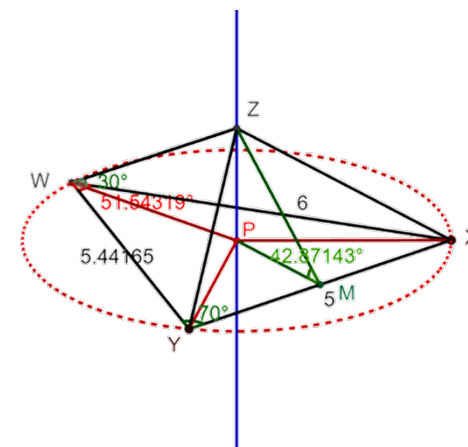
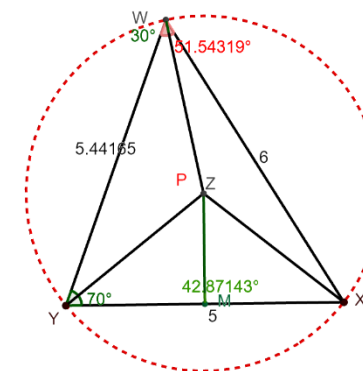
$$\begin{aligned}\angle XWY &= \frac{1}{2} \angle XPY \\ &= \frac{1}{2} (2\angle XPM) \\ &= \angle XPM\end{aligned}$$

在 $\triangle MPX$ 中，

$$\begin{aligned}\sin \angle XPM &= \frac{MX}{PX} \\ \sin \angle XWY &= \frac{\frac{1}{2}XY}{PX}\end{aligned}$$

由此可求出 $\triangle WXY$ 的外接圓的半徑長度 (即 $r = PX = PY = PW$)。

- WZ 與三角形 XWY 的交角是 30° ，即 $\angle ZWP = 30^\circ$ 。利用直角三角形 PWZ 求 PZ 和 WZ (即 YZ 和 XZ)。
- 利用 $\triangle ZYX$ 求 ZM 。
- 利用 $\triangle PMZ$ 求 $\angle ZMP$ 。
- 留意牽涉三角學的題目，運算過程中的值需取多於 3 位有效數字，建議至少 5 至 7 位有效數字。



Q19

- 涉及四心的坐標幾何題目，考生只需運用在中四的直線方程中所學的技巧，便能完成大部份的題目。
- 要求學生對於三角形的四線和四心有深入了解，並且要求學生繪畫草圖以理解不同點與線段之間的關係。
- 考生可以先運用 (b)(i) 提供的 $t = 24$ ，在方格紙上作圖並檢驗答案。

(a) - 考生要留意 R 的坐標是 $(14, 2t)$ ，且 QG 的斜率 $\times PR$ 的斜率 $= -1$ 。

要留意直至現時為止，由於還沒有證明 O, G, Q 是否共線，因此不可利用 OG 的斜率 $\times PR$ 的斜率 $= -1$ 。

- 考生要留意 H 的 x 坐標是 14，且 OH 的斜率 $\times PR$ 的斜率 $= -1$ 。

要留意直至現時為止，由於還沒有證明 O, G, Q 是否共線，因此不可利用 GH 的斜率 $\times PR$ 的斜率 $= -1$ 。

(b)(i) - 求得 $S = (32, 0)$ ，即 $OS = 32$ 。

利用 $\tan \angle PQS = \tan \angle POQ$ ，可得

$t = 24$ (緊記要捨去 $t = -24$)

(ii) - 比較簡單，只須證明 OG 的斜率等於 OQ 的斜率即可，亦可以用作檢驗答案之用。

(iii) - 要留意 $\triangle OPQ \cong \triangle ORQ$ ，因此 $\triangle OPR$ 是等腰三角形，即 I 位於 OQ 上。

- OQ 的直線方程是 $y = \frac{3}{4}x$ 。可設 $I = (4k, 3k)$ 。設 A 是 I 至 OP 的垂足。

- 利用切線性質，

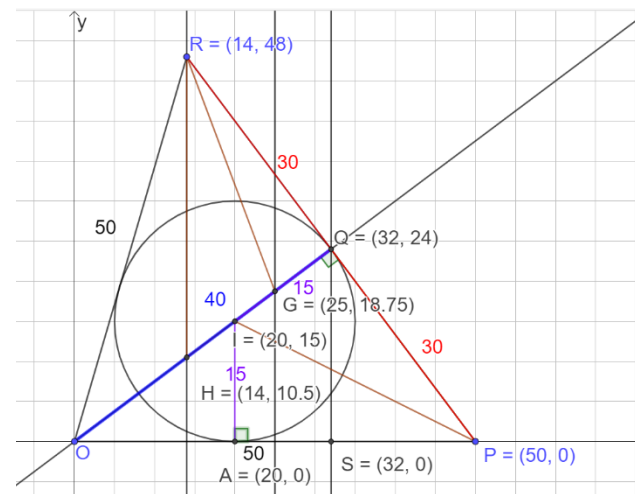
$$PA = PQ$$

$$50 - 4k = 30$$

$k = 5$

$$\therefore I = (20, 15)$$

- 求得 H, G, I 的坐標後，便可直接求出 $\triangle GHR$ 和 $\triangle IPQ$ 的面積 (或利用同高三角形的性質，只需求 $GH:IQ$)。



結語：

老師可建議學生：

1. 須清楚定義題目沒提及的未知數 (不論用文字表示或者畫在圖內)
2. 準確因應題目要求作答 (答句 + 正確單位)。
3. 了解數學名詞 (如方差和標準差，外心、內心、垂心和形心)
4. 運算過程中所得的值要至少取 5 至 7 個有效數字，以減少累積誤差。
5. 在作答時 (特別是**解釋題 Explain your answer**) 應清楚寫出必要的步驟，否則未必得滿分。
6. 某些題目(特別**乙部 Section B**)，要求學生細心留意到問題內隱藏的關鍵資訊和特性來完成解答，未必要求學生在證明後才可使用，此時學生可以寫下「留意到 (Note that) ...」

例如：**Q19 (b)(iii)**

留意到 $\triangle OPQ \cong \triangle ORQ$

$$\therefore OP = OR$$

7. 無論能否完成整份試卷，宜預留最少 10 分鐘作覆核之用。

DSE 2023 卷二分析

麥偉樑博士
香港中文大學數學系講師
香港科技大學數學系客席教員
香港科技大學資優教育發展中心數學統籌

總括分析：

今年卷二整體的深淺程度與往年相若，很多題目的問法大同小異，考生只要有完成過往 3–4 年的試題，相信難度不大，所遇瓶頸不多。一如既往，考生如要在卷二獲取佳績，必須「快、狠、準」，把繁複的運算減到最少，且利用超卓的代數和作圖能力，以最短時間找出解題關鍵並付諸實行。

整份卷的亮點

- 很多題目極其直接，考生只要有敏銳的觀察能力和基本理解能力，即可在短時間內選出正確答案，例如 **Q3, Q7, Q10, Q14, Q29** 及 **Q32**。
- 與近年的試卷相比，今年的判斷句子題有較多文字（參閱 **Q26, Q27, Q35**），而這些題目都分別在測試考生對不同數學概念是否有確實認識，但其實考生在無需判斷所有句子的正確性的情況下，仍能選對相關題目的正確答案，例如：**Q19**（句子 I 明顯地不必定正確）、**Q26**（句子 II 錯誤）、**Q27**（句子 I 錯誤）、**Q45**（句子 II 及 III 均為錯誤）。考生在得知某些句子為錯誤的描述後，很容易選出正確答案。
- 在近兩年的試卷中，均有一道演繹幾何題（**Deductive Geometry**），該題通常可以運用坐標幾何（**Coordinate Geometry**）的方法解題 – 可參閱 **2022 Q22** 和 **2021 Q38**，但類似的方法卻很難在今年的試卷中大派用場。
- 超過 60% 的題型曾經在過往三年的試卷中出現，再次考核的題目很多都變得簡單，例如：

2023	Q8	Q10	Q17	Q21	Q25	Q29	Q34
往年	2020 Q5	2022 Q10	2020 Q18	2021 Q19	2020 Q26	2021 Q29	2022 Q35

此外，很多相似的題型再次出現在本年的試卷中：

2023	Q2	Q12	Q13	Q18	Q27	Q33	Q41	Q44
往年	2020 Q3	2020 Q10	2020 Q11	2022 Q20 2020 Q19	2020 Q27	2021 Q34	2022 Q41 2021 Q41 2020 Q40	2021 Q44 2020 Q44

值得一提的是有幾道題目擬題意念比較新穎，包括 **Q16, Q26, Q37** 和 **Q39**，相信不少考生會被難倒。

- 所有與坐標幾何（**Coordinate Geometry**）有關的題目均不附圖，故考生必須掌握基本作圖能力。

甲部試題的亮點

1. 甲部有較多判斷句子題，包括 **Q18, Q19, Q26** 和 **Q27**。
2. **Q24** 考核學生對極坐標 (Polar Coordinates) 的認識，相關問法曾在 **2022 Q25** 出現。此課題已在新初中課程中刪除，考生須稍加留意。
3. 與近年的試卷相比，在幾何及三角學的試題中，較多題目有附圖供考生作參考 (**2023**：7 題, **2022**：6 題, **2021**：5 題, **2020**：6 題)，這相信與歷屆考生在幾何題目的整體表現稍遜有關。
4. 在甲部的 30 道題目中，約 18 題取材自初中數學課題 (部分題目在解題時更結合高中技巧)。在甲部中段 (**Q15–Q21** 和 **Q23** 均可以運用初中數學的知識解題，但當中有些題目比較冷門，相信本屆考生沒在考試前作相應準備 (**Q16**)；亦有題目要求考生有較強的代數能力 (**Q15** 和 **Q17**)。這些都可能會在未來幾年的試卷出現。

乙部試題的亮點

1. 在乙部的 15 道題目中，只有 **Q38** 有附圖供考生作參考，而 **Q33** 對數關係 (Logarithmic Relation) 卻不像 **2021 Q34** 般有附圖，只用文字表達相關資料，部分考生或不適應此問法。
2. 過往三年的試卷均考核學生對十六進制 (Hexadecimal Number System) 的認識，今年的 **Q31** 卻考核二進制 (Binary Number System)。
3. 有關複數 (Complex Numbers) 的考題 (**Q34**)，今年的問法比過往兩年簡單 (**2022 Q35** 和 **2021 Q35**)。
4. 有關線性規畫 (Linear Programming) 的考題 (**Q37**)，縱使與 **2020 Q36** 擬題模式相近，今年的問法卻比較新穎和艱深。
5. 與坐標幾何 (Coordinate Geometry) 有關的考題 (**Q39** 和 **Q41**) 表面看似複雜，部分考生或花掉很多時間處理此類題目，但其實可以用簡單的幾何及代數方法解題。
6. 近年均有考題關於求三角方程 (Trigonometric Equations) 或對數方程 (Logarithmic Equations) 的解或解的數目，但卻消失於今年的試卷中，這兩類題目頗有機會成為來年的文憑試考題。
7. 三角形的四心 (**Centres of Triangles**) 的題目在今年和過往三年的試卷中均有出現，**2020** 及 **2023** 問及內心 (Incentre)、**2022** 問及外心 (Circumcentre)、而 **2021** 則問及垂心 (Orthocentre)。順帶一提，在今年的卷一中，亦有兩道與外心 (Circumcentre) 屬性相關的分題。縱使如此，近年的卷二考題甚少與形心 (Centroid) 扣上關係，值得未來考生留意。

個別題目分析：

Q6 – D

這是一道非常簡單的算術題，同類型題目**複合不等式 (Compound Inequality)** 每一年都會出現 (**2022 Q7, 2021 Q10, 2020 Q13**)，但此題的最後答案卻是第一次出現在公開考試中。不等式 **(1)** 的解為 $x < -2$ ，而不等式 **(2)** 的解為 $x > -2$ 。由於歷屆公開考試從沒出現過此情況，學生有機會選錯答案。

可幸的是試題並沒選項為所有實數 (All real numbers) 或沒有解 (No solutions)，否則答對率必定會大減。

除了此題型外，老師更可嘗試與學生討論以下不等式的解：

$(x - a)^2 > 0, (x - a)^2 \geq 0, (x - a)^2 < 0, (x - a)^2 \leq 0$ (其中 a 為實數)，更可使用**和/或 (and/or)** 把相關的不等式結合在一起。

Q9 – A

這條題目跟 **2022 Q9** 相若，如考生有做去年的試卷，相信本題難度不大。值得一提的是學生在處理本題時，無需把 a 和 b 的值解出來，亦無需使用計算機。

由於 $h\left(\frac{3}{2}\right) = a\left(\frac{3}{2}\right)^6 + 16\left(\frac{3}{2}\right)^3 + b = 0$ ，我們可以得知 $a\left(\frac{3}{2}\right)^6 + b = -54 \dots\dots\dots(1)$ 。

我們要計算 $h(x)$ 除以 $2x + 3$ 的餘數是 $h\left(-\frac{3}{2}\right) = a\left(-\frac{3}{2}\right)^6 + 16\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + b = \left[a\left(\frac{3}{2}\right)^6 + b\right] - 54 \dots\dots\dots(2)$ 。

從 **(1)** 及 **(2)**，可得 $h\left(-\frac{3}{2}\right) = -108$ 。如果考生嘗試把可行的 a 和 b 代入 **(1)**，就很大機會未能在限時內完成卷二了。

Q15 – A

這道題目結合了代數與幾何元素，需要的是較強的代數能力和數感。先把題目給予的資料寫成數式，並分別設 r 和 h 為圓柱體的底半徑和高，我們可得 $\pi r^2 h = 60^3$ 和 $2\pi r h = 6 \cdot 60^2$ 。

這裏問的只是 r 的值，故考生不用花時間解聯立方程，因為可把第一條數式寫成 $\pi r h = \frac{60^3}{r}$ ，那麼考生只需解 $2\left(\frac{60^3}{r}\right) = 6 \cdot 60^2$ ，即 $r = 20$ cm。

老師可在教學中多訓練學生的觀察能力，從而用最短時間完成同類型題目。

Q16 – D

看到這類題目，考生應在題號旁作標記後並先跳過，因為這類題目既需時思考，亦需作分析和計算。從題目給予的條件，我們可得知 G 為圓 $BEDF$ 的圓心，但卻不知圓 $ABCD$ 的圓心，故考生需自己在 E 與 G 中間構作其圓心 O ，再求 $\angle DOG$ 和 DG 的長度。更甚的是，學生需要把陰影區域的面積寫成圓 $ABCD$ 的面積 $-($ 半圓 DEB 的面積 $-\triangle DOB$ 的面積 $) -$ 扇形 ODB 的面積。這裏涉及的教學內容雖然只包括三角學及扇形的面積，但對大部份學生來說，卻是一道十分困難的數學題。老師可翻查昔日會考年代的相關試題 (如 **2001 Q26, 2002 Q17**)，多給學生作練習，希望學生盡快找到解題方向。

Q17 – B

在最近幾年的文憑試，相似三角形的面積和面積比等於線段比是一種常見的題型，但相信仍然有不少學生未能完成。我們應先設 $\triangle SYR$ 和 $\triangle SYP$ 的面積為 A 和 B ，利用給予的條件和相似三角形的屬性，可得 $\frac{A}{32} = \left(\frac{B}{32}\right)^2$ 和 $A + B = 90$ ，故這裏迫不得已要解二次方程，並把該方程的其中一個根捨去。這裏表面上考的是初中幾何，卻亦結合了高中的二次方程，所以建議老師在校內可多擬跨課題的題目給學生練習，讓學生及早習慣近年公開試的擬題模式。

Q22 – B

這道題目結合了初中和高中的幾何知識，考核的是三角形外角 (Exterior Angle of Triangle) 和圓內接四邊形內角的屬性 (Properties of Cyclic Quadrilateral)。但在應用相關的幾何知識前，學生需把 R 和 T 連起來，並設 $\angle TUS = \angle TSU = a$ ，然後把 $\triangle URS$ 的所有內角以 a 表示，那就不難發現 $\angle USR = (a + 48)^\circ$ 。在考慮 $\triangle URS$ 的所有內角總和為 180° 後，可得知 $a = 25$ 。此類問題一般要求的知識不會太難，但學生對幾何的敏銳度尤其重要，故老師可在教學過程中多作深入分析，以提升學生相關的敏銳觸覺。

Q24 – C

此題其實與 **2022 Q25** 大同小異，只是 **2022** 問考生在繞原點順時針方向旋轉後的極坐標，而 **2023** 問的是逆時針方向旋轉。如考生有練習 **2022** 年的卷二，此題可謂是送分題。值得一提的是極坐標 (Polar Coordinates) 這個課題很快就會被刪走，所以舊課程的考生可多加留意及練習。老師亦可把題目作稍微更改，比如說把 90° 變成 180° 或 270° 。

Q33 – A

有關**線性函數**及**對數**的選擇題其實早於 **2021 Q34** 中出現，**2023** 再次作為考題，不同的只是把圖變成了文字描述。解題方法老生常談，但值得一提的是此題要求考生轉換**對數函數 (Logarithmic Function)** 的**底數 (Base)**，即把左邊和右邊的底數均轉換成 8，以方便作比較。這一步對計算能力較弱的學生來說相對吃力，而且在比較後，我們得到的是 $y = 8^5 x^{-\frac{5}{2}}$ ，故仍需再以代數方式處理該等式。一般來說，建議數學能力屬中下游的學生把這類題目放到最後，否則會在費煞思量後仍然找不到合理的答案。至於在教學方面，老師可設計課堂活動加強學生的代數及基本計算能力，因為同類型題目應將會再次出現，而且愈考愈艱深。

Q37 – D

雖然同類型的**線性規劃 (Linear Programming)** 題目早已在 **2020 Q36** 及 **2022 Q36** 出現過，但今年卷二的相關題目把難度稍微加深。遇到這類題目，考生應放到最後才作出嘗試，因為這類題目並沒有任何快捷方法，學生必須把三條直線畫出來，並求出每兩條線的相交點。至於解題方面，考生需根據給予的不等式組，求出三個相交點為 $(-3, 6)$, $(0, 4)$, $(-3, -1)$ ，這是常見的步驟，而過往的公開考試通常只要求考生計算某區域內所有點得出的最大值或最小值，但今年擬題組要求考生多解 2 道不等式： $-3\beta + 36 \leq 24$ 及 $-3\beta - 6 \leq 24$ 再作比較，故設題方向較以往新穎，相信此題的答對率不高。

Q38 – C

這是一道經典的高中幾何問題，可參閱 **2021 Q39**。每當提及**切線**，學生可利用**切線垂直半徑 (Tangent Perpendicular to Radius)** 的屬性，第一步構作圓心 O ，然後考慮 $\angle ROP$ ，再使用**圓心角兩倍圓周角 (Angle at centre twice angle at circumference)** 計算 $\angle RQP$ ，最後使用**三角形外角 (Exterior Angle of Triangle)** 求得答案。此技巧其實已在多年來的過往考題中使用過，故考生應多做昔日考題，把相關技巧融會貫通。

Q39 – A

類近的題目曾於 **2021 Q40** 出現過，而今年的考題引入兩個未知數 h 和 k ，倘若考生使用代數方法 (即解方程及考慮二次方程根之和) 處理本題，面對的是繁複的計算，絕少考生可以在 2 分鐘內完成有關計算。故必須尋求他法，即用幾何方法處理。首先求得圓的圓心坐標為 $O(4, 2)$ ，然後考慮線 MN 必須經過 $(1, 0)$ ，從而得到 $h = 6$ 。設 P 為 $(1, 0)$ ，利用 OP 垂直 MN 的屬性和兩線斜率之積為 -1 ，即可得到 $k = 4$ 。此類題目絕不容易，學生既要自身有幾何感，也要先思考一番才能開始解題，故應放到考試的最後階段才作處理。

Q41 – C

此類有關四心題目於近年的卷二每年都會出現，**2020 Q40** 問及內心 (In-centre)、**2021 Q41** 問及垂心 (Orthocentre)、**2022 Q41** 則問及外心 (Circumcentre)，而今年卷二再次問及內心 (In-centre)，既考學生的作圖能力，亦考學生能否把三角學、直線方程和幾何知識靈活運用，固然不是一般考生可以解決的問題。

解題方法如下：

設 I 為圓的內心， $\angle QPI = \theta$ ， $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 。

考慮 L_1 的 x 截距為 $-\frac{k}{3}$ ，然後使用內心的屬性找出直線 PR 的斜率 $= \tan(-\theta) = -\frac{3}{4}$ ，從而得知 PR 的方程為 $y = -\frac{3}{4}x - \frac{k}{4}$ 。

最後把該方程代入 L_2 的直線方程中，即可求得 $x = k$ 。由於四心問題在近年的卷一和卷二中不斷出現，高中的數學老師應多花時間向學生闡釋每一個心的幾何屬性及應用，如何把四心和坐標幾何、三角學、甚至演繹幾何連繫在一起，並多與學生討論相關練習和題型。相信在未來幾年的公開考試，四心這個課題會變得愈來愈重要。

Q45 – A

這道有關統計的題目可說是考小心，是一道非常簡單的計算題。如果考生執著於判斷第一句有關標準差 (Standard Deviation) 的正確性，那就會浪費較多時間。無論 n 是正還是負， $4 - 9n$ 必然會是這組數的中位數 (Median)，而其分佈域 (Range) 必定為 6，所以考生只需留意當 n 為負數時，中位數將大於 4，那就可得知 II 和 III 兩句不正確，那麼答案就會呼之欲出了。在教學方面，老師應跟學生溫故知新，定期複習有關統計學的基本定義，構作以代數為數字的不同數集，與學生討論有關方差 (Variance)、標準差 (Standard Deviation)、平均數 (Mean)、中位數 (Median)、眾數 (Mode)、分佈域 (Range)、四分位數間距 (Inter-quartile Range) 等課題，亦可構作兩組數並作出有關統計指標的對比 (**2022 Q45**)。

結語：

由於卷二只得 1 小時 15 分鐘的作答時間，考生們可謂分秒必爭，要取得優異成績就必須施展渾身解數，把初中和高中的數學課題融會貫通，而非活剝生吞、只懂背誦數學公式，不明就裡。學生除了要掌握不同數學公式的相關參數外，更需通權達變、運用得宜。在閱讀較多文字的選擇題時，學生更應及早辨識題目的重要字眼，如**內心 (In-centre)**、**頂點 (Vertex)**、**軌跡 (Locus)**、**等差數列 (Arithmetic Sequence)** 等，然後運用相關的公式嘗試解題。

另外，如前文所提及，本年文憑試的很多題目根本無需作太多計算 (如 **Q3, Q7, Q10, Q29, Q32, Q45** 等)，學生可嘗試於 15–20 秒內解答此類題目，然後把剩餘時間分配到較有挑戰性的題目，當中包括幾何題、需作繁複計算的題目、以及需要時間思考一番才能下筆的題目等 (如 **Q16, Q17, Q33, Q40, Q43**)。當遇到任何瓶頸，考生應及早繞過相關題目，先解答其他較容易的選擇題，從而增強自己的心理素質，發揮最佳表現。畢竟要在數學科取得 5* 或 5**，考生絕不需在卷二拿下滿分：一般來說，答對 40 題以上已很有機會衝星，而每題的分數相等，故考生無需在考試時過於執著，誓要把每一題都解答出來。難題往往暗藏於卷二甲部中至尾段 (大約 **Q16–Q27**)、以及乙部中後段 (大約 **Q38–Q41**)，考生倘遇難題，可在題號旁先作標記，在把所有淺易題目手到拿來後才回去作挑戰。

值得一提的是，近三年的卷二對考生代數能力、作圖能力的要求均有所提升，在幫助及後幾屆考生準備文憑試期間，老師應多加訓練學生的作圖能力，尤其是與**坐標幾何 (Coordinate Geometry)**、**求積法 (Mensuration)**、甚至**三角學 (Trigonometry)** 相關的課題，培養學生的數感和空間感。如學生未能掌握相關技巧，老師可嘗試運用電腦軟件 (如 GeoGebra、Desmos、Wolfram Alpha、MATLAB) 向學生展示和闡明有關幾何元素、幾何變換及立體圖構造的知識，並應在學生掌握基本知識後，把原先的設定稍作更改，鼓勵學生靈活思考，探討數學的不同變化。

本年卷二有超過 60% 的題目與過往三年的同類型題目相若，於稍作改動後，有些題目變得較簡單直接，也有些被加深或複雜化，倘若考生有在備試期間曾完成該三份試卷，一定會有種似曾相識的感覺，故老師可積極與學生討論歷屆試題，並在校內擬定小測，擬題靈感可取材自近幾屆試卷的選擇題，甚至就某些題目加以延伸，把該題的本義發揮得淋漓盡致。只要學生勤加練習，找到解題竅門，定必能走向成功之路。

以下是給前線數學老師的幾項建議：

1. 常言道：「萬丈高樓平地起」，良好的數學根基對應考文憑試的數學科極其重要，老師可多花時間幫助學生鞏固初中的數學知識，尤其在度量、圖形與空間 (Measures, Shape and Space) 方面，可作定期複習。就本年卷二為例，**Q16-21** 及 **Q23** 均涉及初中課題，但這類型題目的答對率一向偏低，其中一個理由是學生往往低估初中幾何的深度，例如相似三角形、多邊形的屬性等。學生在高中較少接觸這類題型，故高中老師在教學時應多提及初中幾何的不同應用及近年公開試的擬題模式，甚至善用不同教學軟件作分析，幫助學生溫故而知新。
2. 綜觀近幾年卷二的擬題模式，我們可以得知數學科不只包含基本算術，更是集合代數、幾何和資料分析於一身，當中以代數為骨幹。故建議老師在校內設題時避免給予學生太多實際數字，而是採用未知數作考核。無論是中四或中六級別，老師均應積極訓練學生的代數能力，讓學生及早適應不同相關問法，習慣用代數方法解決不同類型的選擇題，包括基本計算題、演繹幾何題和坐標幾何題。此外，老師更應加強學生們解方程的能力，當中包括一次方程、一元二次方程、聯立方程，提升學生該方面的速度，務求以最短時間解決大部份需要作繁複計算的選擇題。
3. 在幾何的培養和訓練方面，與首幾屆文憑試相比，近幾年卷二的求積法題目、坐標幾何題、四心題目、甚至今年的三角學問題，均不會提供附圖，故老師可從初中開始，在合理且可行的情況下，培養學生們自我作圖完成幾何題的習慣。當給予學生充足練習後，學生的空間感不單會有所提升，而且學生們會更主動探究不同的幾何屬性、角度的辨識、甚至更深入了解幾何與代數之間的連繫，可謂收一舉數得之效。

最後，謹希老師和學生們能好好參考及分析最近幾年卷二的試題，從中找出更多共通或相似點，並從這些共通點開始出發，以提升數學科的成績，增加學生對數學的興趣，欣賞擬題者的設題動機和不同題目背後的代數和幾何意義。「不經一番寒徹骨，怎得梅花撲鼻香」，未來的考生如想在卷二取得佳績，不可一蹴而就，必須先下一番苦功，多作練習、分析及鑽研，並主動思考，才可在面對數學難題時得心應手、游刃有餘。