

目錄

▶▶ 涉及中一及中二的度量、圖形與空間範疇課題的要點

(G1) 簡單求積法	2
(G2) 全等及相似	3
(G3) 與線及直線圖形有關的角	5
(G4) 畢氏定理	6

▶▶ 涉及初中的度量、圖形與空間範疇課題的精要回顧

(G5) 角錐和圓錐	8
(G6) 球體和相似圖形	12
(G7) 演繹幾何	14
(G8) 四邊形	20
(G9) 直線的坐標幾何	24
(G10) 三角比及其應用	28

綜合評估 A	34
--------------	----

▶▶ 涉及中一及中二的數據處理範疇課題的要點

(D1) 簡單的統計圖表	38
(D2) 組織圖	40

▶▶ 涉及初中的數據處理範疇課題的精要回顧

(D3) 集中趨勢的度量	42
(D4) 基礎概率	48

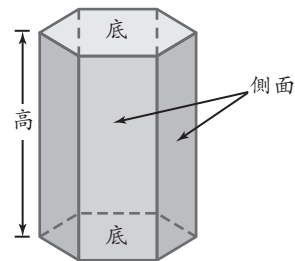
綜合評估 B	52
--------------	----

▶▶ 涉及中一及中二的度量、圖形與空間範疇課題的要點

(G1) 簡單求積法

角柱

- 一個以多邊形為均勻截面的立體稱為角柱。



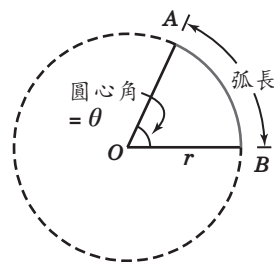
角柱的體積 = 底面積 $\times$ 高

直立柱的總表面面積 = 兩個底的面積 + 所有側面的面積

弧和扇形

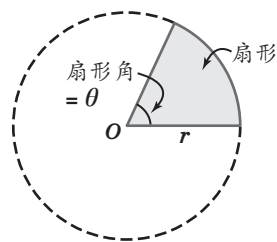
- 圓周的一部分稱為弧。
- 由圓的兩條半徑和一段弧所包圍的部分稱為扇形。

弧 AB 可記作 $\widehat{AB}$ 。



若圓的半徑為 r ，其中某段弧所對的圓心角為 θ ，則

$$\text{弧長} = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r。$$

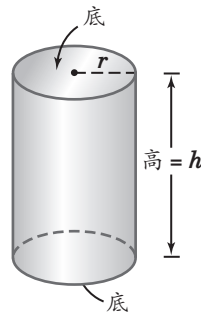


若圓的半徑為 r ，扇形角為 θ ，則

$$\text{扇形的面積} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2。$$

圓柱

- 一個以圓為均勻截面的立體稱為圓柱。
- 圓柱的側面是一個曲面。



若直立圓柱的底半徑是 r ，高是 h ，則

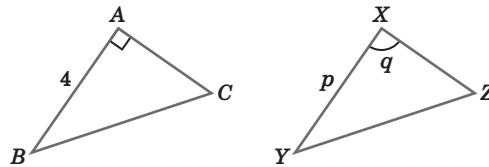
- (i) 曲面面積 $= 2\pi rh$ ；
- (ii) 總表面面積 $= 2\pi rh + 2\pi r^2$ ；
- (iii) 體積 $= \pi r^2 h$ 。

(G2) 全等及相似**全等三角形**

若兩個三角形全等，則它們的

- (i) 對應邊相等；
- (ii) 對應角相等。

例



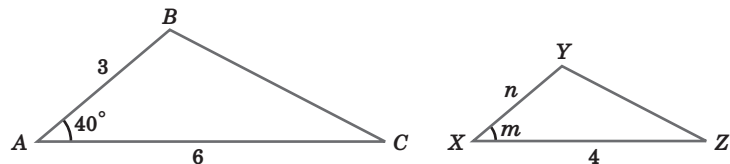
若 $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ ，則 $p = 4$ 及 $q = 90^\circ$ 。

相似三角形

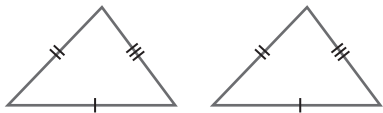
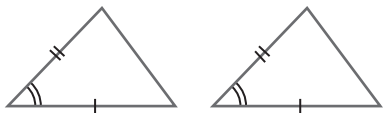
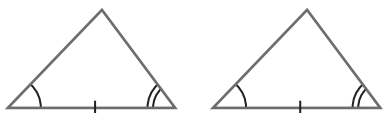
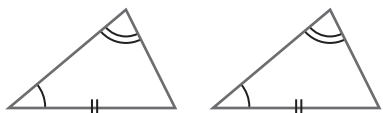
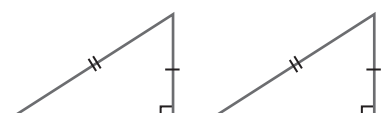
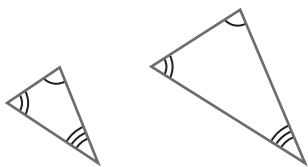
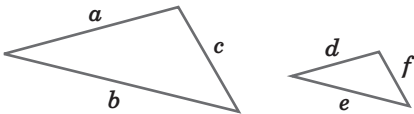
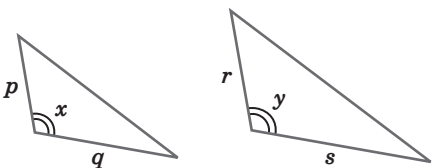
若兩個三角形相似，則它們的

- (i) 對應角相等；
- (ii) 對應邊成比例。

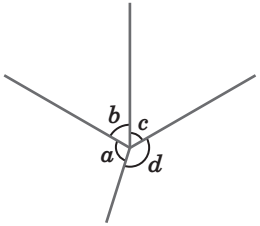
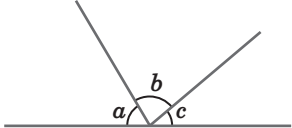
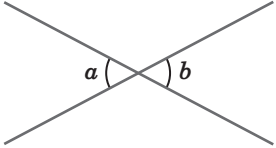
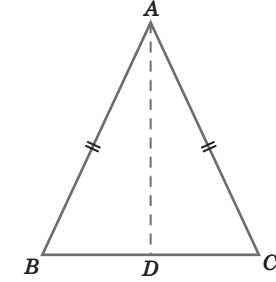
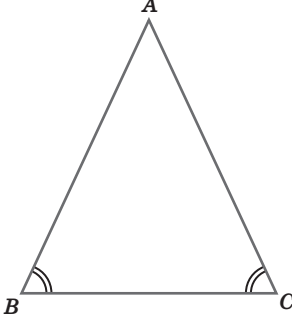
例

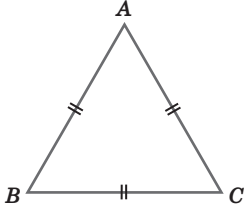


若 $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ ，則 $m = 40^\circ$ 及 $\frac{n}{3} = \frac{4}{6}$ ，即 $n = 2$ 。

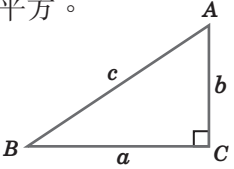
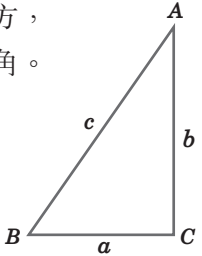
三角形全等的條件	SSS	
	SAS	
	ASA	
	AAS	
	RHS	
三角形相似的條件	AAA	
	三邊成比例	 $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$
	兩邊成比例且夾角相等	 $\frac{p}{r} = \frac{q}{s}, x = y$

(G3) 與線及直線圖形有關的角

與相交線有關的角	同頂角 在圖中，$a + b + c + d = 360^\circ$。 [簡記：同頂角]	
	直線上的鄰角 在圖中，$a + b + c = 180^\circ$。 [簡記：直線上的鄰角]	
	對頂角 在圖中，$a = b$。 [簡記：對頂角]	
等腰三角形 有兩條邊相等的三角形稱為等腰三角形。	- 等腰三角形的兩個底角相等。 即在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB = AC$， 則 $\angle ABC = \angle ACB$。 [簡記：等腰 $\triangle$ 底角] - 等腰三角形是反射對稱圖形， 它的對稱軸會 (i) 平分頂角； (ii) 平分底邊； (iii) 垂直於底邊。 - 若三角形的其中兩個角相等， 則與它們相對的兩條邊亦相等。 即在 $\triangle ABC$ 中， 若 $\angle ABC = \angle ACB$， 則 $AB = AC$。 [簡記：等角對邊相等]	 ◀ $\angle BAD = \angle CAD$ ◀ $BD = DC$ ◀ $AD \perp BC$ 

等邊三角形 三條邊都相等的三角形稱為等邊三角形。	- 若 $\triangle ABC$ 是等邊三角形，則 $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$。 [簡記：等邊 $\triangle$ 性質] - 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A = \angle B = \angle C$，則 $\triangle ABC$ 是等邊三角形。 
多邊形的角 - 凸多邊形的各內角都小於 180°。 - 凸多邊形可按順時針和反時針的方向分別形成兩組外角。	多邊形的內角和 凸 n 邊形的內角和是 $(n - 2) \times 180^\circ$。 [簡記：多邊形內角和]
	多邊形的外角和 凸多邊形的外角和是 360°。 [簡記：多邊形外角和]

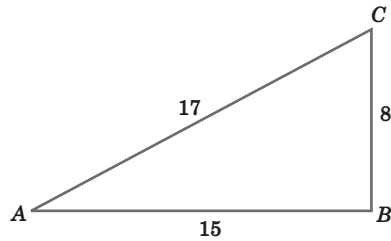
(G4) 畢氏定理

畢氏定理	在直角三角形中，兩條直角邊的平方和等於斜邊的平方。 即 在 $\triangle ABC$ 中， 若 $\angle C = 90^\circ$，則 $a^2 + b^2 = c^2$。 [簡記：畢氏定理] 例 (a) 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C = 90^\circ$，$a = 8$，$b = 6$，則 $c^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ $\therefore c = 10$ (b) 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C = 90^\circ$，$b = 5$，$c = 13$，則 $a^2 + 5^2 = 13^2$ $a^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ $\therefore a = 12$ 
畢氏定理的逆定理	若一個三角形中較短兩邊的平方和等於最長一邊的平方，則該三角形是直角三角形，而最長一邊所對的角是直角。 即 在 $\triangle ABC$ 中， 若 $a^2 + b^2 = c^2$，則 $\angle C = 90^\circ$。 [簡記：畢氏定理的逆定理] 

II 常犯錯誤

同學在處理畢氏定理的問題時，往往與其逆定理混淆。以下是一個例子，你可以找出其中的錯誤嗎？

圖中 $\triangle ABC$ 是否直角三角形？解釋你的答案。



答 是。

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$15^2 + 8^2 = 17^2$$

$$225 + 64 = 289$$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是直角三角形。

[注意這裏「 $AB^2 + BC^2 = AC^2$ 」是基於畢氏定理，而解釋答案所需的卻是畢氏定理的逆定理，即需要分別計算「 $AB^2 + BC^2$ 」與「 AC^2 」，並驗證它們相等。]



涉及初中的度量、圖形與空間範疇課題的精要回顧

(G5) 角錐和圓錐

A. 角錐

要點重溫

1. 定義

- (a) 角錐的底是多邊形，其餘各側面都是三角形，且各側面相交於同一頂點。角錐可依其底形狀而命名，如圖中角錐屬於「四角錐」。
- (b) 角錐相鄰側面的公共邊稱為斜棱。
- (c) 從角錐頂點至底的垂直距離稱為高。

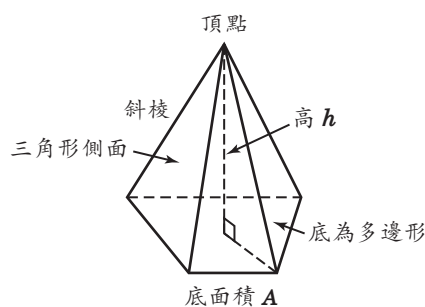


圖 1

2. 直立角錐

- (a) 若圖中 $VABCD$ 是一直立角錐，則：

$$VA = VB = VC = VD$$
- (b) 直立角錐的高 VN 的下端 N 與各底角等距（距離相等）。如圖中所示， $NA = NB = NC = ND$ 。

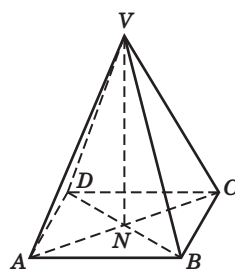


圖 2

3. 度量公式

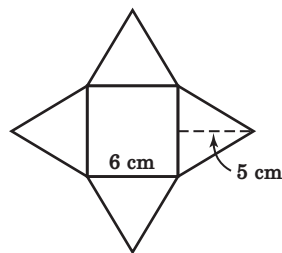
- (a) 角錐的體積 = $\frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$

例 若一個角錐的底為邊長 4 cm 的正方形，高為 6 cm，則
 體積 = $\frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 6 \text{ cm}^3 = 32 \text{ cm}^3$

- (b) 直立角錐的總表面面積 = 總側面面積 + 底面積

例 一直立角錐的摺紙圖樣由圖中正方形及四個相同的三角形組成。

$$\begin{aligned} \text{該角錐的總表面面積} &= \left(4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 5 + 6 \times 6 \right) \text{ cm}^2 \\ &= 96 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



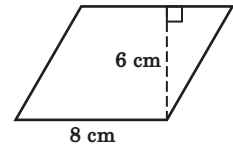
習題

在下列各題中，對的在方格內加「✓」，錯的加「✗」。[第 1–4 題]

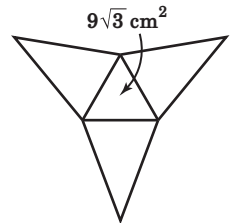
1. 五角錐的底是一個五邊形。 ☐
2. 角錐的斜棱數目與底的邊數相同。 ☐
3. 若兩個直立角錐有相同的底面積和相同的高，則它們的總表面面積也相同。 ☐
4. 若一個直立角錐的底是正 n 邊形，則：
總表面面積 = 底面積 + $n \times$ 各側面的面積。 ☐

在下列第 5–6 題中，求角錐的體積。

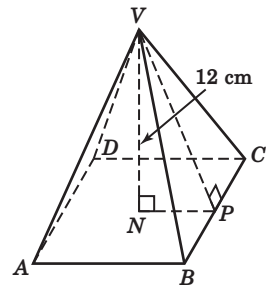
5. 底面積 = 30 cm^2 ，高 = 7 cm 。
6. 底為如圖所示的平行四邊形，高 = 4 cm 。



7. 已知一角錐的體積為 48 cm^3 ，底面積為 16 cm^2 ，求它的高。
8. 圖中所示為一直立角錐的摺紙圖樣。底為面積 $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$ 的三角形，其餘三塊側面為高 8 cm ，底 6 cm 的三角形。求這角錐的總表面面積。（答案以根號「 $\sqrt{\quad}$ 」表示。）



9. (a) 圖中直立角錐的底為正方形 $ABCD$ ，高 VN 為 12 cm ，體積為 400 cm^3 。求底邊邊長。
- (b) 已知 $NP = \frac{1}{2}AB$ 。利用畢氏定理求 VP ，由此求該角錐的總表面面積。



答案：

- | | | | | | |
|-------------------|------------------------------------|---|------|----------------------|----------------------|
| 1. ✓ | 2. ✓ | 3. ✗ | 4. ✓ | 5. 70 cm^3 | 6. 64 cm^3 |
| 7. 9 cm | 8. $(72 + 9\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ | 9. (a) 10 cm (b) 13 cm , 360 cm^2 | | | |

B. 圓錐

要點重溫

在本節，我們將集中討論直立圓錐。

1. 定義

- (a) 直立圓錐有一個圓形的底，側面為一塊曲面。
- (b) 由頂點至底的圓周上任意一點的距離都相等，該距離稱為斜高。

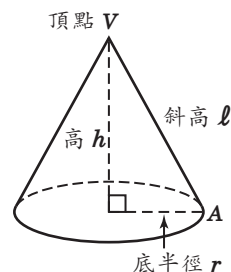


圖 3

2. 度量公式

設一個直立圓錐的高為 h ，底半徑為 r ，斜高為 ℓ 。

◀ 根據畢氏定理， $r^2 + h^2 = \ell^2$ 。

- (a) 體積 = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
- (b) 曲面面積 = $\pi r \ell$
- (c) 總表面面積 = $\pi r \ell + \pi r^2$

例 設一個直立圓錐的高為 12 cm，底半徑為 5 cm。

$$\text{體積} = \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 12 \text{ cm}^3 = 100\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{斜高} = \sqrt{5^2 + 12^2} \text{ cm} = 13 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{曲面面積} = \pi \times 5 \times 13 \text{ cm}^2 = 65\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{總表面面積} = (65\pi + \pi \times 5^2) \text{ cm}^2 = 90\pi \text{ cm}^2$$

3. 與扇形的關係

若把直立圓錐的曲面沿一條斜高剪開，把曲面張開攤平，可得一個扇形。

設直立圓錐的底半徑為 r ，斜高為 ℓ ，

而對應扇形的圓心角為 θ 。

- (a) 扇形的半徑 = 圓錐的斜高 = ℓ
- (b) 扇形的弧長 = 圓錐的底圓周

$$\left(\frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi\ell = 2\pi r\right)$$

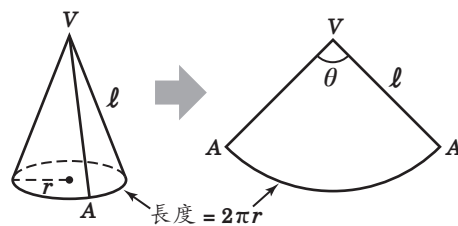


圖 4

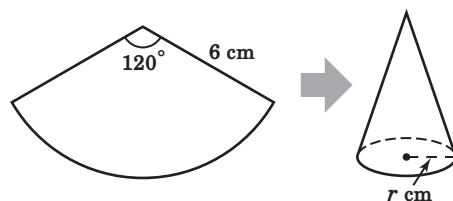
- (c) 扇形的面積 = 圓錐的曲面面積

$$\left(\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi\ell^2 = \pi r \ell\right)$$

例 一個扇形的圓心角為 120° ，半徑為 6 cm。把該扇形捲起使兩邊重合，可得一直立圓錐，其底半徑為 r cm。

$$\frac{120^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 6^2 = \pi \times r \times 6$$

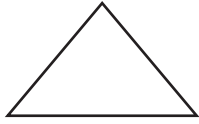
$$\therefore r = 2$$



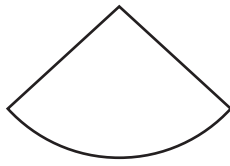
習題

10. 下列哪一摺紙圖樣可以捲成一個直立圓錐？

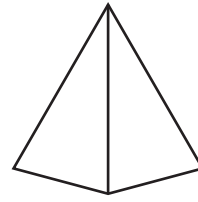
A.



B.



C.



11. 已知一直立圓錐的底半徑是 r ，高是 h ，斜高是 ℓ 而底面積是 A 。
下列何者不等於該圓錐的體積？

A. $\frac{1}{3}Ah$

B. $\pi r\ell$

C. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$



12. 已知一直立圓錐的底半徑是 r ，高是 h 而斜高是 ℓ 。下列何者不等於該圓錐的曲面面積？

A. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

B. $\pi r\ell$

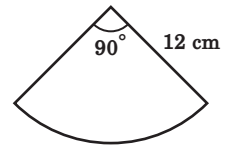
C. $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$



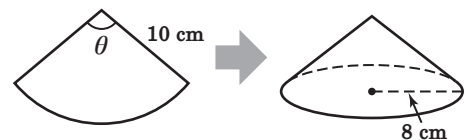
13. 已知一個直立圓錐的底半徑是 6 cm，高是 7 cm，求它的體積。
(答案以 π 表示。)

14. 已知一個直立圓錐的體積是 $50\pi \text{ cm}^3$ 而高是 6 cm，求它的底直徑。

15. 已知一個扇形的半徑是 12 cm 而圓心角是 90° 。若把該扇形捲起使兩邊半徑重合，求所形成直立圓錐的底半徑。



16. 一個扇形的半徑是 10 cm 而圓心角是 θ 。若把該扇形捲起使兩邊半徑重合，所形成直立圓錐的底半徑是 8 cm。求 θ 。



17. 一個直立圓錐的底半徑是 12 cm 而高是 5 cm。求該圓錐的

(a) 體積，(答案以 π 表示。)

(b) 斜高，

(c) 總表面面積。(答案以 π 表示。)

答案：

10. B

11. B

12. A

13. $84\pi \text{ cm}^3$

14. 10 cm

15. 3 cm

16. 288°

17. (a) $240\pi \text{ cm}^3$ (b) 13 cm (c) $300\pi \text{ cm}^2$

(G6) 球體和相似圖形

要點重溫

A. 球體

1. 球體表面所有點與球心 O 等距，該距離稱為球體的半徑。

2. 度量公式

設一個球體的半徑為 r 。

(a) 球體的體積 $= \frac{4}{3}\pi r^3$

(b) 球體的表面面積 $= 4\pi r^2$

例 若一個球體的半徑為 6 cm，

$$\text{則體積} = \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3 \text{ cm}^3 = 288\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{表面面積} = 4 \times \pi \times 6^2 \text{ cm}^2 = 144\pi \text{ cm}^2$$

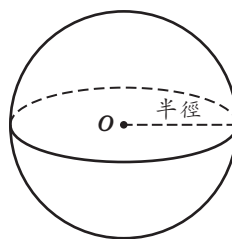


圖 5

B. 相似圖形

相似圖形是指形狀相同的圖形。若 X 和 Y 是兩個相似的圖形，則它們對應的線性量度成比例。

◀ 例如對應的邊長、高、周界等。

1. 相似平面圖形

若 A_1 和 A_2 表示兩個相似平面圖形的面積，

ℓ_1 和 ℓ_2 表示該兩個圖形中任何兩個對應的線性量度，

$$\text{則 } \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2。$$

例 兩個相似梯形的高分別為 4 cm 和 6 cm。

若小梯形的面積為 16 cm^2 ，則

$$\frac{\text{大梯形的面積}}{16 \text{ cm}^2} = \left(\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\therefore \text{大梯形的面積} = 16 \times \frac{9}{4} \text{ cm}^2 = 36 \text{ cm}^2$$



2. 相似立體圖形

若 A_1 和 A_2 表示兩個相似立體的表面面積（指任何兩塊對應的面的面積），

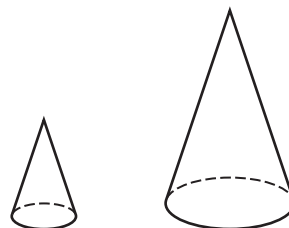
ℓ_1 和 ℓ_2 表示該兩個立體中任何兩個對應的線性量度，

V_1 和 V_2 表示該兩個立體的體積，

$$\text{則 } \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2 \text{ 及 } \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^3。$$

例 兩個相似圓錐的底半徑分別為 3 cm 和 6 cm。

若大圓錐的曲面面積為 $60\pi \text{ cm}^2$ ，體積為 $96\pi \text{ cm}^3$ ，



$$\text{則 } \frac{60\pi \text{ cm}^2}{\text{小圓錐的曲面面積}} = \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 4$$

$$\therefore \text{小圓錐的曲面面積} = \frac{60\pi}{4} \text{ cm}^2 = 15\pi \text{ cm}^2$$

$$\frac{96\pi \text{ cm}^3}{\text{小圓錐的體積}} = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8$$

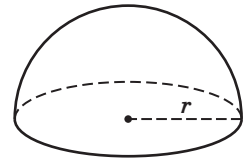
$$\therefore \text{小圓錐的體積} = \frac{96\pi}{8} \text{ cm}^3 = 12\pi \text{ cm}^3$$

習題

1. 設一個半球體的半徑為 r 。由球體的度量公式可以推斷：

(a) 半球體的體積 = _____

(b) 總表面面積 = _____



2. 郭老師在課堂上請同學提出相似圖形的例子。

以下是一些同學所舉的例子。哪些說法正確？

- A. 安琪：所有圓形都是相似圖形。
 B. 卓希：所有圓柱都是相似立體。
 C. 亦信：所有正方體都是相似立體。
 D. 祖儀：所有等腰三角形都是相似圖形。
 E. 泳怡：所有半球體都是相似立體。

3. 已知一個球體的半徑為 5 cm，求它的體積及表面面積，並以 π 表示答案。

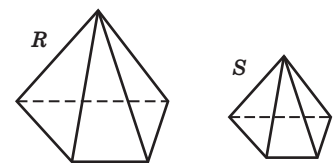
4. 已知一個球體的總表面面積為 $64\pi \text{ cm}^2$ ，求它的直徑。

5. 兩個相似的平行四邊形 X 及 Y 的周界的比是 2 : 5。若 X 的面積是 8 cm^2 ，求 Y 的面積。

6. 圖中所示為兩個相似的角錐 R 及 S ，它們的高的比是 3 : 2。

(a) 已知 R 的體積是 216 cm^3 ，求 S 的體積。

(b) 已知 S 的底面積是 36 cm^2 ，求 R 的底面積。



7. 兩個相似的實心金屬長方體的長度的比是 1 : 2。

(a) 若小長方體的體積是 $V \text{ cm}^3$ ，試以 V 表示大長方體的體積。

(b) 若兩個長方體熔化後可合鑄成一個半徑為 9 cm 的實心球體，求 V 的值，並以 π 表示答案。

答案：

1. (a) $\frac{2}{3}\pi r^3$ (b) $3\pi r^2$

2. A · C · E

3. $\frac{500}{3}\pi \text{ cm}^3$, $100\pi \text{ cm}^2$

4. 8 cm

5. 50 cm^2

6. (a) 64 cm^3 (b) 81 cm^2

7. (a) $8V \text{ cm}^3$ (b) 108π

(G7) 演繹幾何

A. 一些重要的公理及定理

要點重溫

1. 直線上所有鄰角的和是 180°
2. 繞着一點的所有鄰角的和是 360°

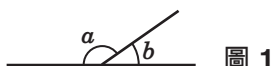


圖 1

在圖 1 中， $a + b = 180^\circ$ 。

[簡記：直線上的鄰角]

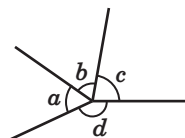


圖 2

在圖 2 中， $a + b + c + d = 360^\circ$ 。

[簡記：同頂角]

3. 對頂角相等

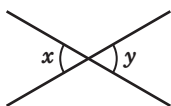


圖 3

在圖 3 中， $x = y$ 。

[簡記：對頂角]

4. 三角形的內角之和是 180°

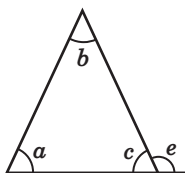


圖 4

在圖 4 中， $a + b + c = 180^\circ$ 。

[簡記： $\triangle$ 內角和]

5. 三角形外角等於兩個內對角之和

在圖 4 中， $e = a + b$ 。[簡記： $\triangle$ 外角]

6. 若兩條直線平行，則所形成的

(a) 同位角相等； (b) 內錯角相等； (c) 同旁內角互補。

在圖 5 中， $AB \parallel CD$ ，因此：

$a = b$ [簡記：同位角， $AB \parallel CD$]

$c = d$ [簡記：內錯角， $AB \parallel CD$]

$b + c = 180^\circ$ [簡記：同旁內角， $AB \parallel CD$]

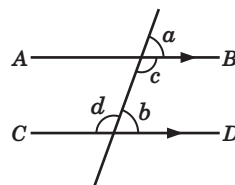


圖 5

7. 若以下其中一個條件成立，則兩線平行。

(a) 同位角相等 (b) 內錯角相等 (c) 同旁內角互補

在圖 6 中：

若 $a = b$ ，則 $AB \parallel CD$ 。[簡記：同位角相等]

若 $c = d$ ，則 $AB \parallel CD$ 。[簡記：內錯角相等]

若 $b + c = 180^\circ$ ，則 $AB \parallel CD$ 。[簡記：同旁內角互補]

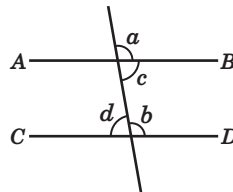


圖 6

習題

在下列各題中，參看附圖，判斷各題是否正確，對的在方格內加「✓」，錯的加「✗」。[第 1-4 題]

1. $a = 50^\circ$

☐

2. $b = 60^\circ$

☐

3. $c = 60^\circ$

☐

4. $PQ \parallel RS$

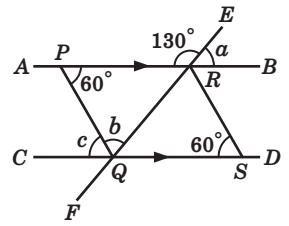
☐

5. 參看附圖，下列哪組 a 和 b 的值是正確的？

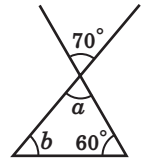
A. $a = 70^\circ$, $b = 60^\circ$

B. $a = 70^\circ$, $b = 50^\circ$

C. $a = 60^\circ$, $b = 60^\circ$

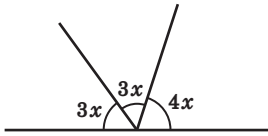
☐


(AB 、 CD 及 EF 都是直線。)

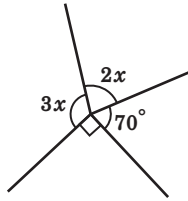


求下列各圖中的未知量。[第 6-11 題]

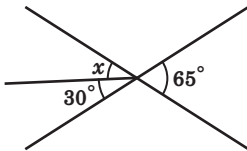
6.



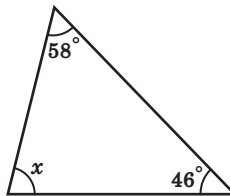
7.



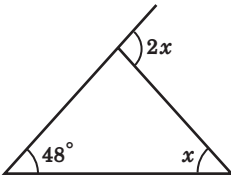
8.



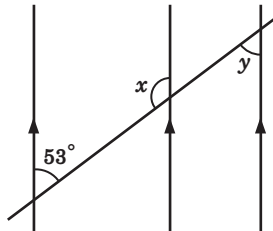
9.



10.



11.



答案：

1. ✓

2. ✗

3. ✓

4. ✓

5. B

6. 18°

7. 40°

8. 35°

9. 76°

10. 48°

11. $x = 127^\circ$, $y = 53^\circ$

B. 演繹法

要點重溫

1. 演繹法就是根據一些已知條件為基礎，經過推理，從而得出結論。

例

已知條件

條件 (i)：直線上各鄰角的和是 180° 。
 條件 (ii)： $\angle ACD = 80^\circ$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ 。

推理

結論

ACB 不是一條直線。

2. 在幾何學上，透過演繹法利用一些公理或定理，根據已知條件進行嚴謹推理，可求出圖形中的未知量或證明某些幾何結果。

注意：進行證明時必須提供各步驟的理由（可採用兩欄式）。

- 例 (a) 圖中 BCD 是一條直線。求 x 和 y 。

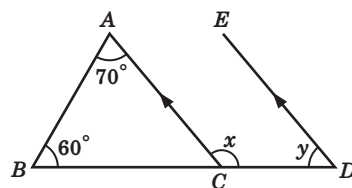
解

$$x = 60^\circ + 70^\circ = \underline{\underline{130^\circ}} \text{ (}\triangle\text{ 外角)}$$

$$x + y = 180^\circ \text{ (同旁內角, } AC \parallel ED)$$

$$130^\circ + y = 180^\circ$$

$$y = \underline{\underline{50^\circ}}$$



- (b) 圖中 PQR 及 UQV 都是直線。證明 $PQ \parallel ST$ 。

證明

$$a = 30^\circ$$

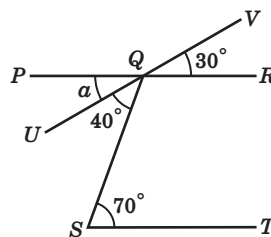
$$\therefore \angle PQS = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$$

$$\text{即 } \angle PQS = \angle QST$$

$$\therefore \underline{\underline{PQ \parallel ST}}$$

對頂角

內錯角相等



- (c) 圖中 XYZ 是一條直線。證明 $XA \perp AB$ 。

證明

$$m + 42^\circ = 110^\circ$$

$$m = 68^\circ$$

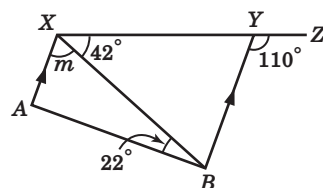
在 $\triangle XAB$ 中，

$$m + \angle XAB + 22^\circ = 180^\circ$$

$$68^\circ + \angle XAB + 22^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \angle XAB = 90^\circ$$

$$\text{即 } \underline{\underline{XA \perp AB}}$$

同位角， $AX \parallel BY$ $\triangle$ 內角和

習題

在下列各題中，根據已知條件，判斷所給的句子是否正確，正確的在方格內加「✓」，錯的加「✗」。[第 12–14 題]

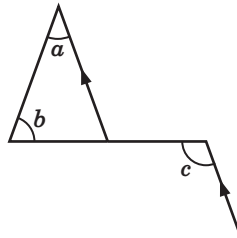
12. 條件 (i)：所有長方形都是平行四邊形。

條件 (ii)：四邊形 $ABCD$ 是一個平行四邊形。

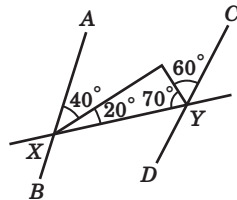
結論： $ABCD$ 必定是一個長方形。



13. $a + b = c$

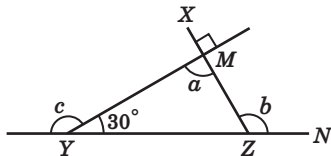


14. $AB \parallel CD$

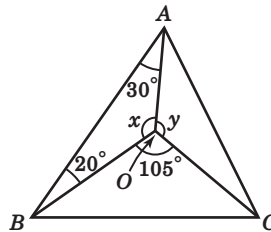


求下列各圖中的未知量。[第 15–16 題]

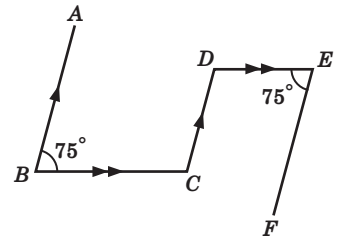
15.



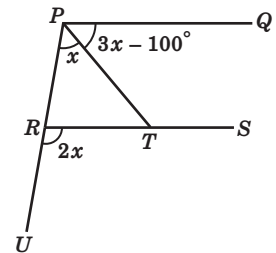
16.



17. 證明圖中 $AB \parallel EF$ 。



18. 圖中 RTS 是一條直線， $\angle RPT = x$ ， $\angle TPQ = 3x - 100^\circ$ ， $\angle URS = 2x$ ， TP 平分 $\angle RPQ$ 。證明 $PQ \parallel RS$ 。



答案：

12. ✗

13. ✓

14. ✗

15. $a = 90^\circ$ ， $b = 120^\circ$ ， $c = 150^\circ$

16. $x = 130^\circ$ ， $y = 125^\circ$

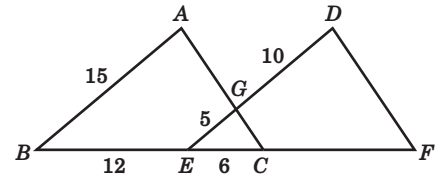
C. 以演繹法解涉及三角形的幾何問題

要點重溫

1. 全等三角形和相似三角形

利用全等 / 相似三角形的性質或判定條件，可以作出簡單幾何證明及推論出一些結果。

例 在圖中， AGC 、 DGE 及 $BECF$ 都是直線且
 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。證明 $\triangle CGE \sim \triangle CAB$ 。



證明

$$\angle DEF = \angle ABC$$

$$\text{即 } \angle GEC = \angle ABC$$

$$\frac{GE}{AB} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, \frac{CE}{CB} = \frac{6}{6+12} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \triangle CGE \sim \triangle CAB$$

全等 $\triangle$ 的對應角

兩邊成比例且夾角相等

2. 三角形的線和三角形的心

特殊的線	垂直平分線	角平分線	中線	高線（或高）
定義	垂直於一邊並將該邊平分的線。	將一個內角分成兩個等角的線。	連接三角形的一個頂點與其對邊中點的線。	由三角形的一個頂點至其對邊的垂直線。
中心名稱	⊙外心 (三條垂直平分線的交點)	⊙內心 (三條角平分線的交點)	⊙形心 (三條中線的交點)	⊙垂心 (三條高線的交點)
性質	以外心為圓心可作三角形的外接圓，通過三角形各頂點。	以內心為圓心可作三角形的內切圓，並與各邊只相交於一點。	形心會把每條中線以 2 : 1 的比分成兩份。	/
圖例	 (O 是外心。)	 (I 是內心。)	 (G 是形心。)	 (H 是垂心。)

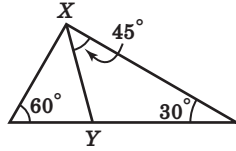
習題

19. 在下列各題中，

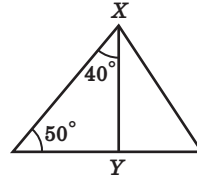
(i) 指出特殊線 XY 的名稱，

(ii) 指出必定在特殊線 XY 上的三角形的心名。

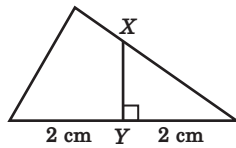
(a)



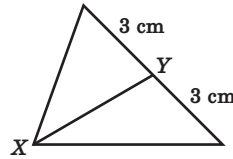
(b)



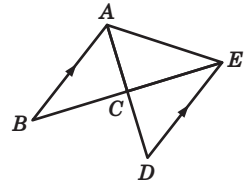
(c)



(d)



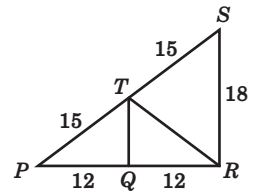
20. 在圖中， ACD 和 BCE 都是直線， $AB \parallel ED$ ， AD 是 $\angle BAE$ 的角平分線，而 BE 是 $\angle AED$ 的角平分線。
證明 $\triangle ACE \cong \triangle DCE$ 。



21. 在圖中， T 和 Q 分別是 PS 和 PR 的中點。

(a) 證明 $\triangle PTQ \sim \triangle PSR$ 。

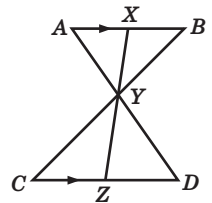
(b) 求 TQ ，由此證明 TQ 是 PR 的垂直平分線。



22. 圖中， AYD 、 BYC 、 XYZ 都是直線， $AB \parallel CD$ 而 $\frac{XB}{ZC} = \frac{XY}{ZY}$ 。

(a) 考慮相似三角形，證明 $\frac{AX}{DZ} = \frac{XY}{ZY}$ 。

(b) 若 YZ 是 $\triangle YCD$ 的一條中線，則 XY 是否 $\triangle ABY$ 的中線？



答案：

19. (a) (i) 角平分線

(ii) 內心

(b) (i) 高線

(ii) 垂心

(c) (i) 垂直平分線

(ii) 外心

(d) (i) 中線

(ii) 形心

21. (b) 9

22. (b) 是

(G8) 四邊形

要點重溫

A. 平行四邊形的定義和性質

平行四邊形是一個有兩組對邊平行的四邊形。

平行四邊形的性質：

1. 兩組對邊分別相等。
2. 兩組對角分別相等。
3. 對角線互相平分。

[簡記：平行四邊形性質]

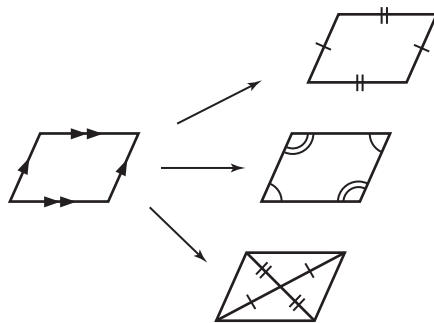
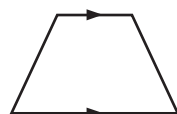


圖 1

增值知識

梯形是有一組對邊平行的四邊形。

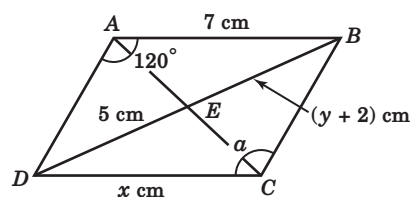


例 已知圖中 $ABCD$ 是一個平行四邊形，則

$$x = 7, a = 120^\circ,$$

$$y + 2 = 5$$

$$\therefore y = 3$$



B. 平行四邊形的判定條件

若一個四邊形符合以下（左欄）任何一個條件，則它必為平行四邊形。

判定條件	簡記
1. 兩組對邊分別相等	對邊相等
2. 兩組對角分別相等	對角相等
3. 兩條對角線互相平分	對角線互相平分
4. 有一組對邊平行而且相等	對邊 // 且相等

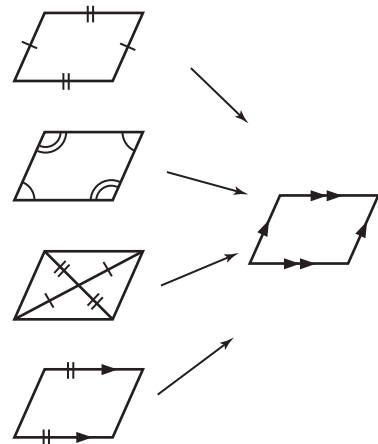


圖 2

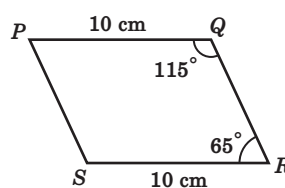
例 圖中 $PQ = SR = 10 \text{ cm}$
 且 $\angle Q + \angle R = 115^\circ + 65^\circ$
 $= 180^\circ$
 $\therefore PQ \parallel SR$
 $\therefore \underline{PQRS \text{ 是一個平行四邊形。}}$

已知

已知

同旁內角互補

對邊 // 且相等



習題

在下列各題中，對的在方格內加「✓」，錯的加「✗」。[第 1–5 題]

1. 一個平行四邊形的兩條對角線必然相等。

☐

2. 一個平行四邊形的內角可以是鈍角、銳角或直角。

☐

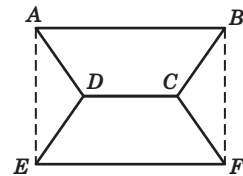
3. 平行四邊形的對角線會把該四邊形分成兩個全等的三角形。

☐

✂ 4. 如果一個四邊形的兩條對角線相等，則它必為平行四邊形。

☐

✂ 5. 圖中 $ABCD$ 和 $EFCD$ 是兩個全等的梯形，
它們有公共邊 CD ，則 $ABFE$ 是一個平行四邊形。

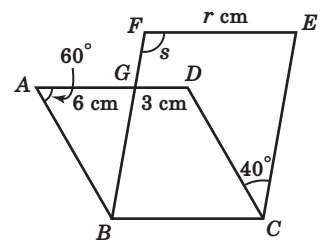
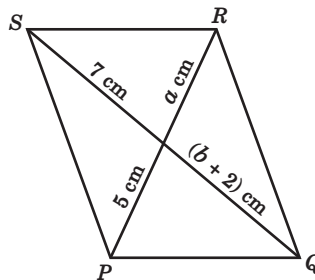
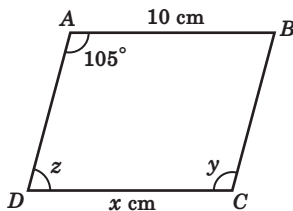
☐


求下列各圖中的未知量。[第 6–8 題]

6. $ABCD$ 是平行四邊形。

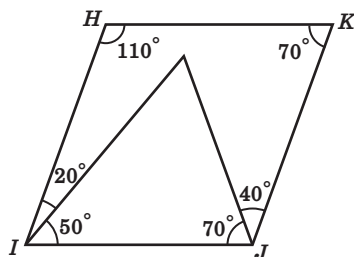
7. $PQRS$ 是平行四邊形。

8. $ABCD$ 和 $BCEF$ 都是
平行四邊形。

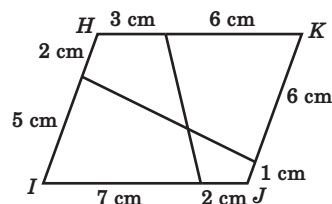


在下列各題中，證明 $HIJK$ 是平行四邊形。[第 9–10 題]

✂ 9.



✂ 10.



答案：

1. ✗

2. ✓

3. ✓

4. ✗

5. ✓

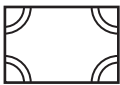
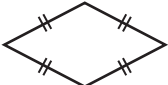
6. $x = 10$, $y = 105^\circ$, $z = 75^\circ$

7. $a = 5$, $b = 5$

8. $r = 9$, $s = 100^\circ$

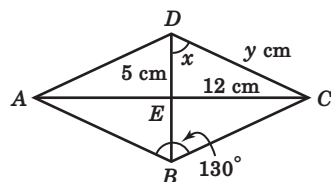
要點重溫

C. 長方形、菱形和正方形

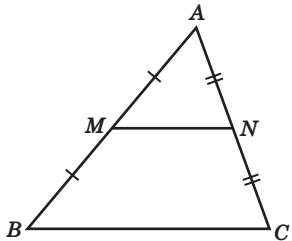
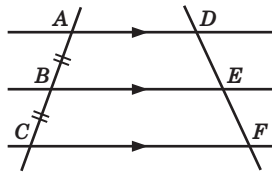
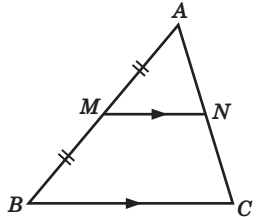
	長方形 	菱形 	正方形 
定義	各角相等的四邊形	各邊長度相等的四邊形	各邊長度相等及各角相等的四邊形
性質	- 平行四邊形的所有性質 - 所有角都是直角 - 對角線相等 - 對角線互相平分成四條相等線段 [簡記：長方形性質]	- 平行四邊形的所有性質 - 對角線互相垂直 - 內角被對角線平分 [簡記：菱形性質]	- 長方形及菱形的所有性質 - 對角線與邊的夾角是 45° [簡記：正方形性質]

例 已知圖中為一菱形，則可推斷：

$$\begin{aligned}
 x &= 130^\circ \div 2 = 65^\circ && (\text{菱形性質}) \\
 \angle DEC &= 90^\circ && (\text{菱形性質}) \\
 y^2 &= 5^2 + 12^2 && (\text{畢氏定理}) \\
 \therefore y &= 13
 \end{aligned}$$



D. 中點定理及截線定理

定理	中點定理 [簡記：中點定理]	截線定理 [簡記：截線定理]
內容	在 $\triangle ABC$ 中， 若 $AM = MB$ 及 $AN = NC$ ， 則 $MN \parallel BC$ 及 $MN = \frac{1}{2}BC$ 。 	(i) 若 $AD \parallel BE \parallel CF$ 及 $AB = BC$ ， 則 $DE = EF$ 。 
		(ii) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $AM = MB$ 及 $MN \parallel BC$ ，則 $AN = NC$ 。 

習題

在下列各題中，對的在方格內加「✓」，錯的加「✗」。[第 11–16 題]

11. 若一個長方形有一組鄰邊相等，則它是一個正方形。

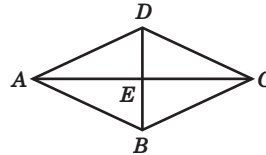
☐

12. 若一個平行四邊形有一組鄰邊相等，則它是一個菱形。

☐

圖中所示為一個平行四邊形 $ABCD$ ， E 是兩條對角線的交點。回答以下兩題。

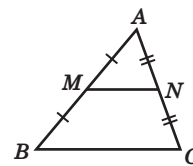
13. 若 $ABCD$ 是長方形，則 $DC^2 = DE^2 + EC^2$ 。

☐

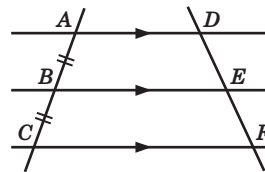
14. 若 $ABCD$ 是菱形，則 $\angle ADC = 2\angle DBC$ 。

☐

✂ 15. 在圖中， $\triangle ABC$ 的周界是 $\triangle AMN$ 的周界的兩倍。

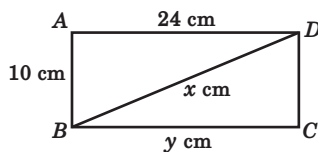
☐

✂ 16. 在圖中， $AD = BE = CF$ 。

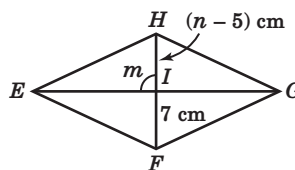
☐

求下列各圖中的未知量。[第 17–22 題]

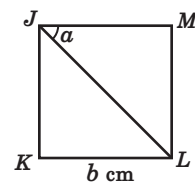
17. $ABCD$ 是長方形。



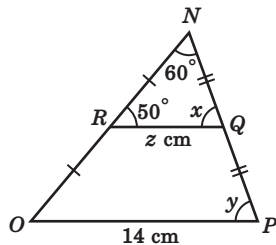
18. $EFGH$ 是菱形。



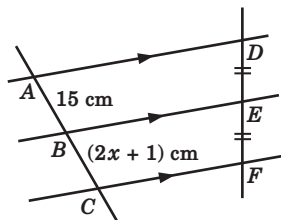
19. $JKLM$ 是正方形，其周界是 72 cm。



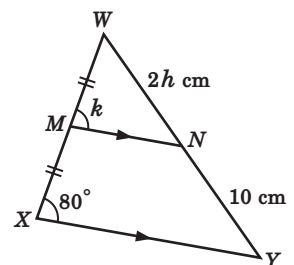
✂ 20.



✂ 21.



✂ 22.



答案：

11. ✓

12. ✓

13. ✗

14. ✓

15. ✓

16. ✗

17. $x = 26$, $y = 24$

18. $m = 90^\circ$, $n = 12$

19. $a = 45^\circ$, $b = 18$ cm

20. $x = 70^\circ$, $y = 70^\circ$, $z = 7$ cm

21. 7

22. $h = 5$, $k = 80^\circ$

(G9) 直線的坐標幾何

要點重溫

A. 距離公式

若 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 是直角坐標平面上的兩點，

則 $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。

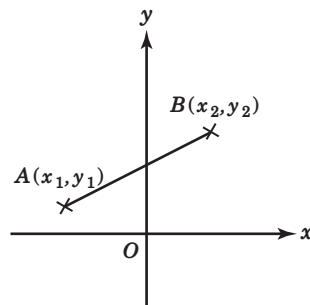


圖 1

例 已知 $A(-3, 3)$ 和 $B(2, 15)$ 兩點，

則 $AB = \sqrt{[2 - (-3)]^2 + (15 - 3)^2} = 13$ 。

B. 斜率

1. 斜率公式

若 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 是直角坐標平面上的兩點，其中 $x_1 \neq x_2$

(即 AB 不是鉛垂線)，則直線 AB 的斜率， $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 。

例 對於前述例子的 A 、 B 兩點， $m_{AB} = \frac{15 - 3}{2 - (-3)} = \frac{12}{5}$ 。

增值知識

若 A 、 B 在同一水平線上，則 $AB = A$ 與 B 兩點的 x 坐標之差；
若 A 、 B 在同一鉛垂線上，則 $AB = A$ 與 B 兩點的 y 坐標之差。
(不必使用距離公式。)

2. 直線的方向與斜率

(a) 由左至右向上傾斜的直線的斜率是正數，由左至右向下傾斜的直線的斜率是負數。(見圖 2)

(b) 不理會斜率的正負符號，只要斜率的數字愈大，則傾斜程度愈大。

例 已知直線 AB 的斜率是 -4 ，直線 CD 的斜率是 3 。

$\because 4 > 3$ ，

$\therefore AB$ 比 CD 的傾斜程度更大。

(c) 水平線的斜率是 0 ，鉛垂線的斜率則是未下定義的。

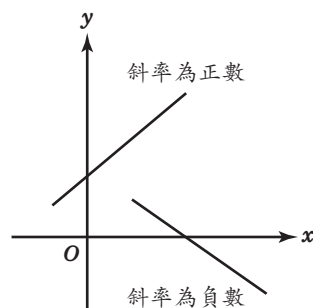


圖 2

習題

1. 以下何者是計算 $A(3, 5)$ 與 $B(4, 1)$ 兩點間的距離的正確算式？

- A. $AB = \sqrt{(4-3)^2 + (1-5)^2}$
 B. $AB = \sqrt{(3-5)^2 + (4-1)^2}$
 C. $AB = \sqrt{(3-4)^2 + (5-1)^2}$
 D. $AB = \sqrt{(3^2-4^2) + (5^2-1^2)}$

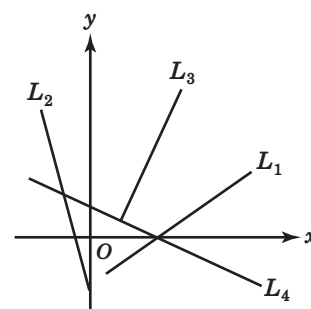
2. 距離公式對於位於同一水平或鉛垂線上的兩點不成立。

答：☐ 是 ☐ 否

3. 以下何者是計算通過 $A(7, 4)$ 和 $B(0, 8)$ 兩點的直線的斜率的正確算式？

- A. $m_{AB} = \frac{8-4}{0-7}$
 B. $m_{AB} = \frac{0-7}{8-4}$
 C. $m_{AB} = \frac{8-4}{7-0}$
 D. $m_{AB} = \frac{4-8}{7-0}$

4. 按斜率由大至小排列右圖中的四條直線。



利用以下各點的坐標，回答下列各題。[第 5–10 題]

$A(0, 1)$, $B(3, 5)$, $C(6, 7)$, $D(11, -5)$, $E(18, 2)$, $F(-6, 9)$

5. 求 AB 的長度。
 6. 求 CD 的長度。
 7. 求 EF 的長度。
 8. 求 AB 的斜率。
 9. 求 CD 的斜率。
 10. 求 EF 的斜率。

答案：

1. A, C 2. 否 3. A, D 4. L_3, L_1, L_4, L_2 5. 5
 6. 13 7. 25 8. $\frac{4}{3}$ 9. $-\frac{12}{5}$ 10. $-\frac{7}{24}$

要點重溫

C. 平行線及垂直線

1. 平行線

(a) 若兩條直線互相平行，則它們的斜率相等。

例 設 m_1 、 m_2 分別代表圖中直線 ℓ_1 、 ℓ_2 的斜率。
若已知 $\ell_1 \parallel \ell_2$ 且 $m_1 = 3$ ，則可知 $m_2 = 3$ 。

(b) 若兩條直線的斜率相等，則它們互相平行。

例 已知 $C(1, 0)$ 和 $D(6, 10)$ 兩點及直線 AB 的斜率為 2。

因為 $m_{CD} = \frac{10-0}{6-1} = 2$ ，所以 $AB \parallel CD$ 。

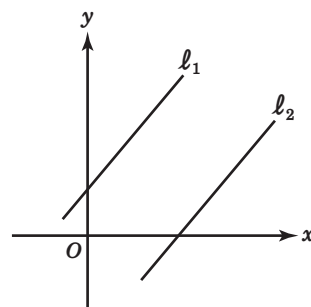


圖 3

2. 垂直線

(a) 若兩條斜率不等於 0 的直線互相垂直，則它們的斜率的積等於 -1 。

例 設 m_1 、 m_2 分別代表圖中直線 ℓ_1 、 ℓ_2 的斜率。
若已知 $\ell_1 \perp \ell_2$ 且 $m_1 = -2$ ，則
因為 $-2 \times m_2 = -1$ ，所以 $m_2 = \frac{1}{2}$ 。

(b) 若兩條直線的斜率的積等於 -1 ，則它們互相垂直。

例 已知直線 ℓ_1 的斜率是 $-\frac{3}{2}$ ，直線 ℓ_2 的斜率是 $\frac{2}{3}$ 。

因為 $m_1 \times m_2 = -\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = -1$ ，所以 $\ell_1 \perp \ell_2$ 。

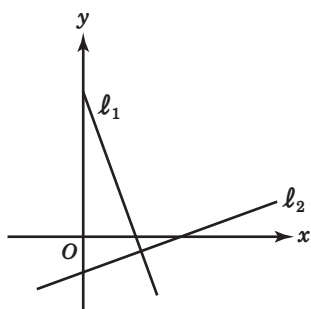
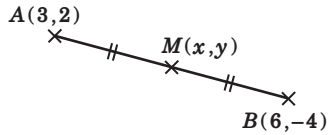
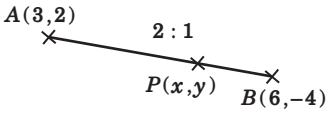


圖 4

D. 分點

已知 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 兩點。

	中點公式	分點公式
	$M(x, y)$ 是線段 AB 的中點	$P(x, y)$ 是 AB 的分點，使 $AP : PB = r : s$
公式	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$	$x = \frac{sx_1 + rx_2}{r + s}, y = \frac{sy_1 + ry_2}{r + s}$
例子	 $M(x, y)$ 是 AB 的中點。 $x = \frac{3+6}{2} = 4.5, y = \frac{2-4}{2} = -1$ 即 M 的坐標是 $(4.5, -1)$。	 $P(x, y)$ 是 AB 的分點，使 $AP : PB = 2 : 1$。 $x = \frac{1(3) + 2(6)}{2 + 1} = 5, y = \frac{1(2) + 2(-4)}{2 + 1} = -2$ 即 P 的坐標是 $(5, -2)$。

習題

11. 若線段 AB 與 BC 的斜率相同，則可知 A 、 B 和 C 三點必在（同一 / 不同）直線之上。
12. 若線段 PQ 和 QR 的斜率分別為 -4 及 0.25 ，則可推斷 $PQ^2 + QR^2 =$ _____。
13. 如果 $AB \parallel CD$ 而 $CD \perp EF$ ，則 $m_{AB} \times m_{EF} =$ _____。
14. 已知 $M(x, y)$ 是連接 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 兩點的線段的中點，則下列何者正確？
- A. $x = \frac{x_1 - x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 - y_2}{2}$ C. $x = \frac{x_1 - y_1}{2}$, $y = \frac{x_2 - y_2}{2}$
- B. $x = \frac{x_2 + x_1}{2}$, $y = \frac{y_2 + y_1}{2}$
- ✂ 15. 已知 $A(1, 9)$ 和 $B(0, 4)$ 兩點，而 $P(x, y)$ 是線段 AB 的分點，使 $AP : PB = 3 : 2$ ，則下列何者正確？
- A. $x = \frac{2(9) + 3(4)}{5}$ C. $y = \frac{2(9) + 3(4)}{5}$
- B. $x = \frac{2(1) + 3(0)}{5}$ D. $y = \frac{3(9) + 2(4)}{5}$
16. 已知 $A(1, 6)$ 、 $B(2, 9)$ 、 $C(x, -5)$ 和 $D(2, 4)$ 四點且 $AB \parallel CD$ ，求 x 。
17. 已知 $P(-4, 0)$ 、 $Q(8, 8)$ 、 $R(5, 3)$ 和 $S(7, y)$ 四點且 $PQ \perp RS$ ，求 y 。
18. 已知 $H(a, -2)$ 、 $K(3, 8)$ 、 $L(10, b)$ 和 $M(6, 4)$ 四點。若 HK 的傾角是 45° 且 $HK \parallel MN$ ，求 a 和 b 的值。

在下列第 19–20 題中，已知 A 和 B 兩點，求線段 AB 的中點的坐標。

19. $A(0, 8)$, $B(12, 0)$

20. $A(-7, 5)$, $B(3, -11)$

21. 已知 $U(5, h)$ 是連接 $V(9, -5)$ 和 $W(k, 1)$ 的線段的中點，求 h 和 k 的值。

✂ 在下列第 22–24 題中，已知 P 點是線段 AB 的分點。根據所給的比求 P 的坐標。

22. $A(0, 3)$, $B(6, 0)$, $AP : PB = 2 : 1$

23. $A(3, 5)$, $B(9, 11)$, $AP : PB = 1 : 2$

24. $A(8, -4)$, $B(-2, 6)$, $AP : PB = 2 : 3$

答案：

11. 同一 12. PQ^2 13. -1 14. B 15. B, C 16. -1 17. 0 18. $a = -7$, $b = 8$
19. $(6, 4)$ 20. $(-2, -3)$ 21. $h = -2$, $k = 1$ 22. $(4, 1)$ 23. $(5, 7)$ 24. $(4, 0)$

(G10) 三角比及其應用

要點重溫

A. 三角比的基礎知識 (對於銳角 θ)

1. 定義

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{AC}{AB} \\ \cos \theta &= \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{BC}{AB} \\ \tan \theta &= \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} = \frac{AC}{BC}\end{aligned}$$

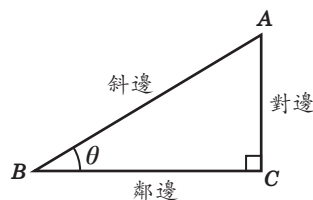
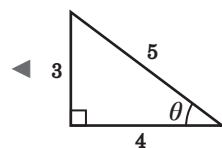


圖 1

例 在右圖中， $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ， $\cos \theta = \frac{4}{5}$ ， $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 。



2. 取值範圍： $\sin \theta$ 及 $\cos \theta$ 的值都介乎 0 與 1 之間， $\tan \theta$ 的值則可以是任何正數。

取值變化：隨著銳角 θ 增加， $\sin \theta$ 及 $\tan \theta$ 的值都會增加， $\cos \theta$ 的值則會減少。

3. 特殊角的三角比

θ 三角比	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$)	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$)	1	$\sqrt{3}$

例 $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \tan^2 45^\circ$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1^2$
 $= \frac{5}{4}$

B. 常用的三角恆等式

(1) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	(2) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	◀ (2a) $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ (2b) $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$
(3) $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$	(4) $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$	(5) $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$

例 (a) $\cos^2(90^\circ - \theta) + \cos \theta \sin(90^\circ - \theta) = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

(b) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta \sin \theta}$

(c) 已知 $\sin \theta = 0.4$ ，則 $0.4^2 + \cos^2 \theta = 1$ 。

$\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - 0.4^2} = 0.9$ (準確至一位小數)

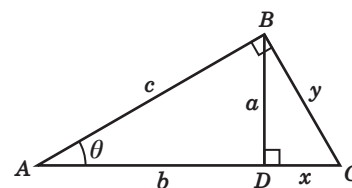
習題

1. 參看右圖，

(a) $\sin \theta = \frac{a}{c} = \frac{y}{(\quad)}$

(b) $\theta = \frac{b}{c} = \frac{(\quad)}{b+x}$

(c) $\tan \theta = \frac{a}{(\quad)} = \frac{(\quad)}{c}$



2. 三名同學提出以下說法。試不用計算機，判斷誰的說法正確。

A. 靜宜：「 $\sin 60^\circ = 2 \sin 30^\circ$ 」

B. 如賢：「 $\sqrt{3} \cos 60^\circ - \cos 30^\circ = 0$ 」

C. 正澈：「 $\tan^2 60^\circ = 4 \tan 30^\circ$ 」

在下列各題中，對的在方格內加「✓」，錯的加「✗」。[第 3–5 題]

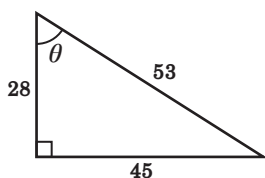
3. $\sin^2 \theta = (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)$ ☐

4. $\cos(90^\circ - \theta) = \tan \theta \sin \theta$ ☐

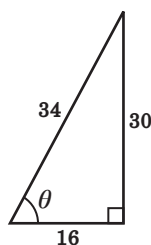
5. $\tan \theta = 1 \div \tan(90^\circ - \theta)$ ☐

參看下列各圖，求 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 和 $\tan \theta$ 。[第 6–7 題]

6.



7.



不用計算機，求下列各式的值。[第 8–9 題]

8. $2 \sin 30^\circ + \tan 45^\circ$

9. $\tan^2 60^\circ - \cos^2 30^\circ$

化簡下列各式。[第 10–11 題]

10. $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \tan(90^\circ - \theta)$

11. $(\cos \theta \tan \theta)^2 + \sin^2(90^\circ - \theta)$

答案：

1. (a) $b+x$ (b) $\cos$, c (c) b , y

2. B

3. ✓

4. ✗

5. ✓

6. $\sin \theta = \frac{45}{53}$, $\cos \theta = \frac{28}{53}$, $\tan \theta = \frac{45}{28}$

7. $\sin \theta = \frac{15}{17}$, $\cos \theta = \frac{8}{17}$, $\tan \theta = \frac{15}{8}$

8. 2 9. $\frac{9}{4}$ 10. 1 11. 1

要點重溫

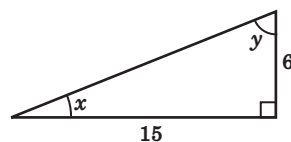
C. 利用三角比求平面圖形的未知量

1. 若已知直角三角形的一個銳角及一邊，或者已知二邊，則利用三角比可以求出其他未知角及邊，也可以求出一些日常應用問題中所涉及平面圖形的角與邊。

例 在圖中， $\tan x = \frac{6}{15}$ ，

$$\therefore x = 21.8^\circ \text{ (準確至一位小數) } \boxed{21.801}$$

$$y = 90^\circ - 21.801^\circ = 68.2^\circ \text{ (準確至一位小數)}$$



2. 若只知一個銳角 θ 的其中一個三角比的值，利用畢氏定理，即使不用計算機，也可以求出 θ 角其他三角比的值。

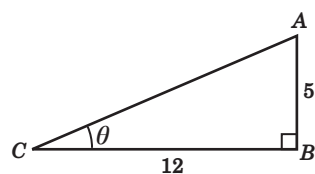
例 若已知 $\tan \theta = \frac{5}{12}$ ，則可畫直角三角形 ABC

使 $\angle ACB = \theta$ ， $AB = 5$ 及 $BC = 12$ ，

由此可得

$$AC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{5}{13} \text{ 及 } \cos \theta = \frac{12}{13}$$



注意：如果是已知 $\sin \theta$ 或 $\cos \theta$ ，除了利用畢氏定理之外，也可以利用 **B** 節的恆等式 (2a) 或 (2b) 求出 $\cos \theta$ 或 $\sin \theta$ ，然後用恆等式 (1) 求出 $\tan \theta$ 。

D. 斜坡的斜率

1. 圖 2 中的直線 AB 代表一個斜坡。

(a) 斜坡 AB 的斜率 = $\frac{\text{鉛垂距離}}{\text{水平距離}} = \frac{BC}{AC}$

斜率一般寫成 $\frac{1}{n}$ 或 $1:n$ 的形式，其中 n 是整數。

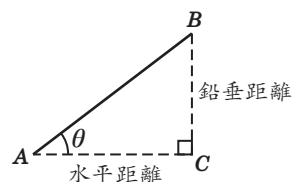


圖 2

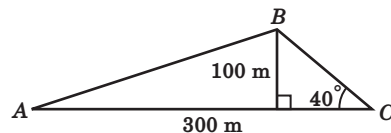
(b) 若 AB 的傾角 (即 AB 與水平面的夾角) 是 θ ，則它的斜率 = $\tan \theta$ 。

2. 斜坡的斜率愈大表示其傾斜程度也愈大。

例 圖中，斜坡 AB 的斜率 = $\frac{100}{300} = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \text{斜坡 } BC \text{ 的斜率} &= \tan 40^\circ \\ &= 0.8 \text{ (準確至一位小數)} \end{aligned}$$

因為 $0.8 > \frac{1}{3}$ ，所以斜坡 BC 比 AB 更加傾斜。



習題

在下列各題中，對的在方格內加「✓」，錯的加「✗」。[第 12–14 題]

12. 若已知直角三角形的一個銳角及斜邊，則可以求出兩條直角邊。

☐

13. 若已知直角三角形的一個銳角 θ 的其中一個三角比的值，
則可求出該三角形三邊的長度。

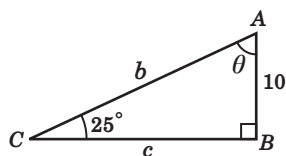
☐

14. 斜率為 1 : 8 的斜坡的傾斜程度較傾角為 8° 的斜坡大。

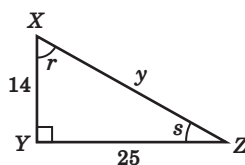
☐

求下列各圖中的未知邊及角。如有需要，取答案準確至最接近的整數。[第 15–16 題]

15.



16.



17. 已知 $\tan \theta = \frac{2}{3}$ ，試不用計算機求 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ ，並以根號「 $\sqrt{\quad}$ 」表示答案。

18. 已知 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ，試不用計算機求 $\sin \theta$ 和 $\tan \theta$ ，並以根號「 $\sqrt{\quad}$ 」表示答案。

完成下表。如有需要，取答案準確至最接近的整數。[第 19–20 題]

	斜坡	鉛垂距離 (m)	水平距離 (m)	傾角	斜率 (1 : n)
19.	AB	20	40		
20.	CD	35			1 : 6

21. 上表中的哪個斜坡的傾斜程度較大？

答案：

12. ✓

13. ✗

14. ✗

15. $\theta = 65^\circ$, $b = 24$, $c = 21$

16. $r = 61^\circ$, $s = 29^\circ$, $y = 29$

17. $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

18. $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, $\tan \theta = \sqrt{5}$

19. 27° , 1 : 2

20. 210, 9°

21. AB

要點重溫

E. 仰角和俯角

1. 當一個人觀察位置比他高的物體時，其視線與水平線所形成的角稱為仰角。
2. 當觀察位置比他低的物體時，則視線與水平線所形成的角稱為俯角。

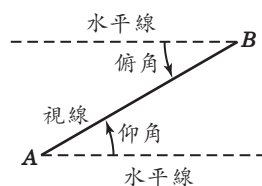
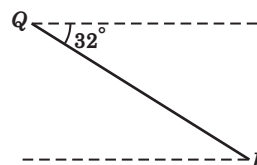


圖 3

3. 由 A 測得 B 的仰角 = 由 B 測得 A 的俯角

例 圖中，由 P 測得 Q 的仰角
 = 由 Q 測得 P 的俯角
 = 32°



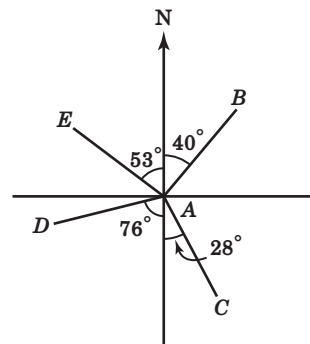
F. 方位

方位是表示兩點之間的相對位置，可以用羅盤方位角或真方位角來表示。

1. 羅盤方位角

由觀測點 A 的正北方或正南方向東或西測量至 B 點，得出角 x° ($0 < x < 90$)，所求的方位以 $Nx^\circ E$ 、 $Nx^\circ W$ 、 $Sx^\circ E$ 或 $Sx^\circ W$ 的形式表示。

例 圖中，由 A 測得 B 、 C 、 D 和 E 的羅盤方位角分別是 $N40^\circ E$ 、 $S28^\circ E$ 、 $S76^\circ W$ 、 $N53^\circ W$ 。



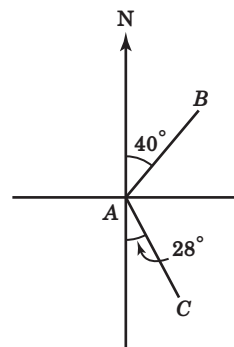
2. 真方位角

由觀測點 A 的正北方開始，按順時針方向量度至 B 點，得出角 y° ($0 \leq y < 360$)，所求的方位以角 y° 表示，其中 y 的整數部分必須寫成一個三位數字。

例 圖中，

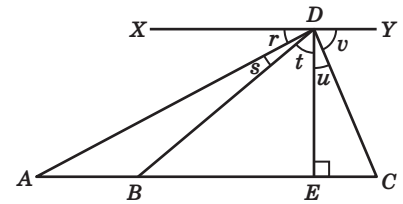
由 A 測得 B 的真方位角是 040° ；

由 A 測得 C 的真方位角是 152° 。 ◀ $180^\circ - 28^\circ = 152^\circ$



習題

圖中， A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 X 、 Y 位於同一鉛垂平面上， $ABEC$ 及 XDY 為水平線。



在下列各題中，對的在方格內加「✓」，錯的加「✗」。

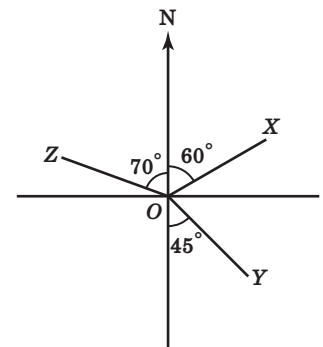
[第 22–24 題]

22. 由 A 測得 D 的仰角等於 r 。 ☐

23. 由 B 測得 D 的仰角等於 t 。 ☐

24. 由 D 測得 C 的俯角等於 v 。 ☐

參看右圖，完成下列各題。[第 25–28 題]



25. 由 O 測得 X 的羅盤方位角 = _____

26. 由 O 測得 Y 的羅盤方位角 = _____

27. 由 O 測得 Z 的羅盤方位角 = _____，
真方位角 = _____

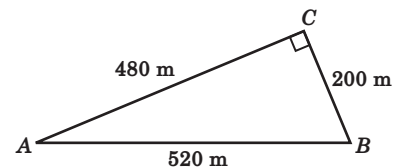
28. 由 Z 測得 O 的真方位角 = _____

29. 國際金融中心二期的高度是 416 m，它與尖沙咀天星碼頭相距約 900 m。求從碼頭望向該大廈頂部的仰角，準確至最接近的 5° 。

30. 大嶼山最高的鳳凰山高 934 m，與天壇大佛的水平距離為 1 030 m。大佛高 26 m，基座的海拔約 520 m。若登上鳳凰山頂可遠眺大佛，求望向大佛頂部的俯角，準確至最接近的 5° 。

31. 若由 A 點測得 B 點的羅盤方位角是 $S30^\circ E$ ，求由 B 測得 A 的羅盤方位角和真方位角。

32. 圖中，島 B 位於島 A 的正東方且 $\angle ACB = 90^\circ$ 。求 $\angle ABC$ 。由此求由島 B 測得島 C 的真方位角。
(答案須準確至最接近的 0.1° 。)

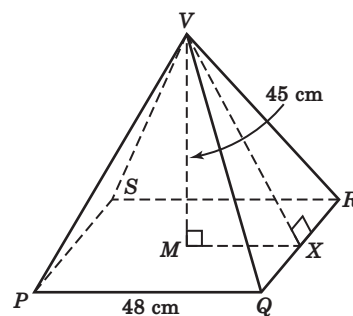


答案：

- | | | | | | |
|-----------------|----------------|----------------|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| 22. ✓ | 23. ✗ | 24. ✓ | 25. $N60^\circ E$ | 26. $S45^\circ E$ | 27. $N70^\circ W$ ， 290° |
| 28. 110° | 29. 25° | 30. 20° | 31. $N30^\circ W$ ， 330° | 32. 67.4° ， 337.4° | |

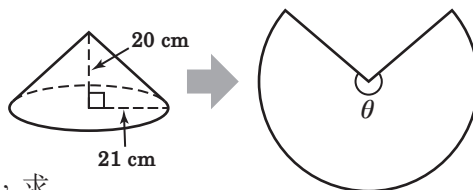
綜合評估 A

1. (a) 圖中為一直立角錐形的玻璃箱，用於陳列展品。它的底為邊長 48 cm 的正方形 $PQRS$ ，高 VM 為 45 cm。求玻璃箱所佔體積。
- (b) 利用畢氏定理求 VX ，由此求該玻璃箱的總表面面積。
(不用計算底面積。)



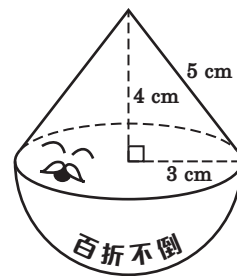
2. 一個直立圓錐的底半徑是 21 cm 而高是 20 cm。

- (a) 求該圓錐的體積，答案以 π 表示。
- (b) 求該圓錐的曲面面積，答案以 π 表示。
- (c) 若把該圓錐的曲面沿一條斜高剪開再攤平成一扇形，求扇形的圓心角 θ ，準確至最接近的 1° 。



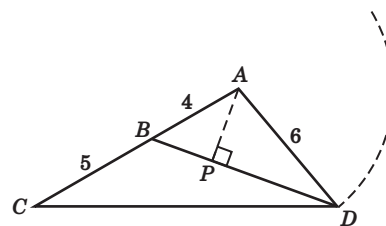
3. 恩童在工展會中見到一款寫有「百折不倒」勵志語句的實心不倒翁公仔，由軟膠造的直立圓錐加上相同半徑的金屬半球體組成，大小如右圖所示，售價為 \$33。

- (a) 求該不倒翁的體積和總表面面積，答案以 π 表示。
- (b) 另一個相同形狀但半徑為 6 cm 的較大的不倒翁售價為 \$68。較小的還是較大的一個更划算呢？為甚麼？



4. 圖中， ABC 是一直線。 AP 是 $\triangle ABD$ 的一條高線。

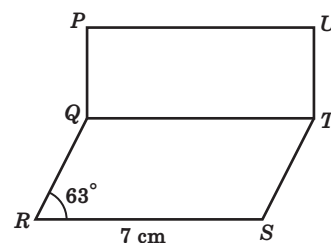
- (a) 證明 $\triangle ABD \sim \triangle ADC$ 。
- (b) (i) BP 與 CD 是否平行？為甚麼？
(ii) 若把 AP 延長與 CD 相交於點 Q ， AQ 是否 $\triangle ADC$ 的高線？
- (c) 假設以 A 為圓心， AD 的長度為半徑畫一弧。已知 X 是弧上的一點使得 CAX 是一條直線。求 CX 的長度。



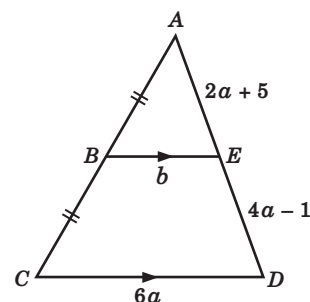
5. 圖中， $PQTU$ 是長方形， $QRST$ 是平行四邊形， $\angle QRS = 63^\circ$ 而 $RS = 7 \text{ cm}$ 。

(a) 求 PU 及反角 UTS 。

✂ (b) 證明 $PRSU$ 是平行四邊形。



- ✂ 6. 求右圖中的未知量 a 和 b 。

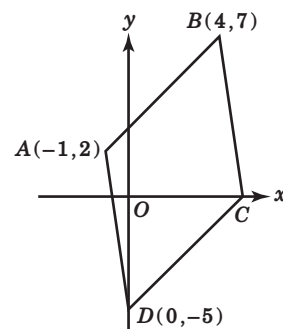


7. 圖中所示為平行四邊形 $ABCD$ 。

(a) 求 AB 及 AD 的長度。 $ABCD$ 是哪一種特殊四邊形？

(b) 求 AB 的斜率。不使用計算機，求 AB 的傾角。

(c) 求 BD 的斜率，由此求 AC 的斜率。



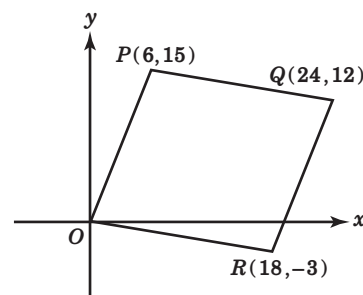
8. 圖中所示為四邊形 $OPQR$ 。

(a) (i) 求 OQ 及 PR 兩線段的中點的坐標。

✂ (ii) 由此判斷 $OPQR$ 是哪一種四邊形。

✂ (b) (i) 已知 M 和 N 分別是 OP 和 PQ 上的點，使 $OM : MP = 2 : 1$ 及 $PN : NQ = 1 : 2$ 。求 M 和 N 的坐標。

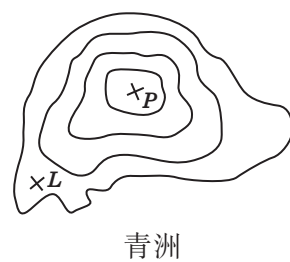
(ii) 證明 $MN \parallel OQ$ 。



9. (a) 求 $\frac{4 \sin 60^\circ \cos 30^\circ}{3 \tan 45^\circ} - \frac{\sin 30^\circ \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ \cos 60^\circ}$ 的值。

(b) 已知 $\sin \theta = \frac{1}{4}$ ，試不用計算機，求 $\cos \theta$ 及 $\tan(90^\circ - \theta)$ 。

右圖是港島西面的青洲，其最高點 P 的海拔為 89 m。 L 點是青洲燈塔，其底部離海平面約 30 m，燈塔本身高 17.5 m。回答以下第 10–12 題。



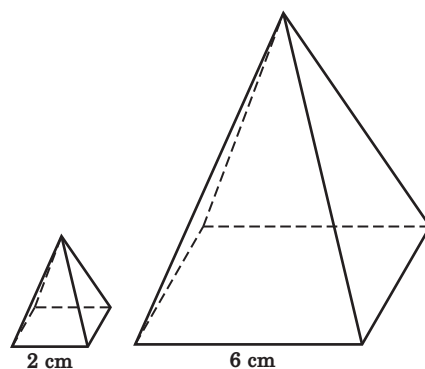
10. 有一小徑由燈塔通往青洲的最高點。已知 L 、 P 的水平距離約為 100 m，假設該小徑為直路，求它的斜率，答案以 $1:n$ 表示，其中 n 為整數。
11. 由燈塔望向香港島可見最接近的山峯是摩星嶺，離燈塔約 1 100 m。若摩星嶺高 269 m，求由燈塔頂部望向摩星嶺的仰角，準確至最接近的 1° 。
12. 由燈塔可測得摩星嶺的羅盤方位角為 $S52^\circ E$ 。
 - (a) 以真方位角表示上述方位。
 - (b) 求由摩星嶺測得青洲燈塔的真方位角。

13. 圖中，兩個相似立體的底邊長分別是 2 cm 和 6 cm。若小立體的體積是 $V \text{ cm}^3$ ，求大立體的體積。
以下是一名同學的作答。試指出不妥當或錯誤的地方。

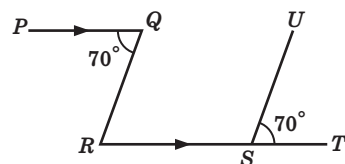
$$\frac{\text{小立體的體積}}{\text{大立體的體積}} = \frac{\text{小立體的底邊長}}{\text{大立體的底邊長}}$$

$$\frac{V \text{ cm}^3}{\text{大立體的體積}} = \frac{2 \text{ cm}}{6 \text{ cm}}$$

$$\text{大立體的體積} = 3V \text{ cm}^3$$



14. 在圖中， $\angle PQR = \angle UST = 70^\circ$ ， RST 是直線及 $PQ \parallel RT$ 。
證明 $QR \parallel US$ 。
以下是一名同學的作答。試指出不妥當或錯誤的地方。



$$\angle PQR = \angle UST = 70^\circ \quad (\text{已知})$$

$$\angle PQR = \angle QRT = 70^\circ \quad (\text{內錯角, } PQ \parallel RT)$$

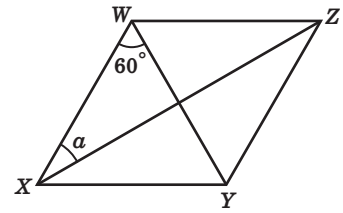
$$\angle QRT = \angle UST = 70^\circ \quad (\text{同位角, } QR \parallel US)$$

$$\therefore \underline{QR \parallel US}$$

15. 在圖中， $WXYZ$ 是一個菱形。求 a 的值。

以下是一名同學的作答。試指出不妥當或錯誤的地方。

$$\begin{aligned} \because \angle WXY &= 2a && (\text{菱形性質}) \\ \angle ZWX &= \angle WXY && (\text{菱形性質}) \\ \therefore 2 \times 60^\circ &= 2a \\ \therefore a &= 60^\circ \end{aligned}$$



答案：

1. (a) $34\,560\text{ cm}^3$ (b) $51\text{ cm} \cdot 4\,896\text{ cm}^2$
2. (a) $2\,940\pi\text{ cm}^3$ (b) $609\pi\text{ cm}^2$ (c) 261°
3. (a) $30\pi\text{ cm}^3$, $33\pi\text{ cm}^2$
(b) 大的，因為大的一款的體積是小的 8 倍，但價錢只是小的約 2 倍。
4. (b) (i) 否 (BP 延長後會與 CD 相交於 D) (ii) 否 (c) 15
5. (a) 7 cm , 207° 6. $a = 3$, $b = 9$
7. (a) $AB = \sqrt{50}$ (或 $5\sqrt{2}$)， $AD = \sqrt{50}$ (或 $5\sqrt{2}$)，菱形 (b) 1 , 45° (c) $BD : 3$, $AC : -\frac{1}{3}$
8. (a) (i) OQ 中點： $(12, 6)$ ， PR 中點： $(12, 6)$ (ii) 平行四邊形
(b) (i) $M : (4, 10)$ ， $N : (12, 14)$
9. (a) 0 (b) $\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\sqrt{15}$
10. $1 : 2$ 11. 11° 12. (a) 128° (b) 308°
13. 第一步錯了，體積之比應是對應邊長的比的立方。
14. 第三步的「 $\angle QRT = \angle UST = 70^\circ$ 」是由之前的兩步推論而得，卻錯誤且不必要地引用「同位角， $QR \parallel US$ 」這個理由，故應刪去這理由。在最後一步「 $QR \parallel US$ 」才須加上「同位角相等」作為理由。
15. 第二步「 $\angle ZWX = \angle WXY$ 」是錯的，這並非菱形的性質。
由此求得的 a 值也錯誤。
特殊四邊形之中，只有長方形及正方形的所有內角是相等的。

涉及中一及中二的數據處理範疇課題的要點

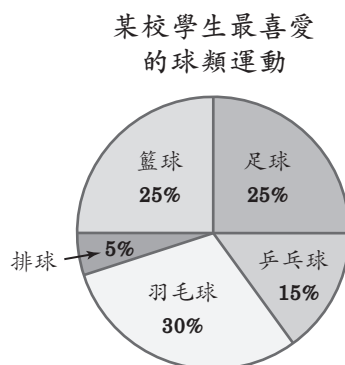
(D1) 簡單的統計圖表

圓形圖及 折線圖

圓形圖

要顯示各項目佔全部的百分數，使用圓形圖較為合適。

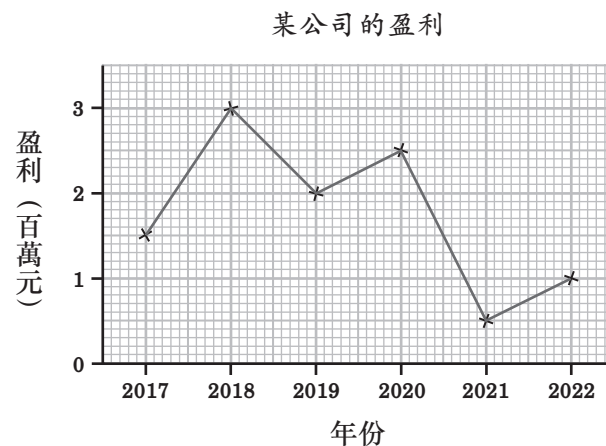
例



折線圖

要顯示數據在某段時間內的變化及趨勢，可使用折線圖。

例



幹葉圖

幹葉圖
要顯示所有數據的分佈，且保留每一個數據的數值，使用幹葉圖是最佳選擇。

例 25 名學生的測驗得分	
幹 (10 分)	葉 (1 分)
4	3 3 5 5 8 9
5	2 3 6 7 7
6	0 1 4 4 4 8
7	1 1 2 6 9 9
8	3 5

背靠背幹葉圖
要比較兩組同類數據的分佈，可使用背靠背幹葉圖。

例 兩款電池的壽命		
超能牌		大力牌
葉 (1 小時)	幹 (10 小時)	葉 (1 小時)
1	15	2 6 9
8 3 2	16	3 4 5 5 7 8
9 9 8 7 5 5 5 4 2 0 0	17	1 2 2 3 5 6 7 9
8 8 8 8 6 6 6 2 0 0 0	18	1 3 5 5 7 8
6 2 1	19	2 2 6 7 9
4	20	3 4

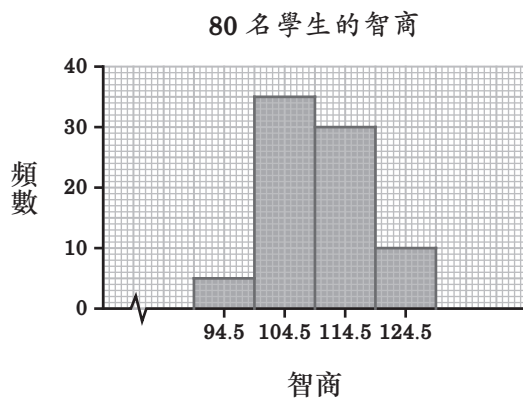
(D2) 組織圖

組織圖、
頻數多邊
形及頻數
曲線

組織圖

組織圖可以用來表達已分組的連續數據的頻數分佈。

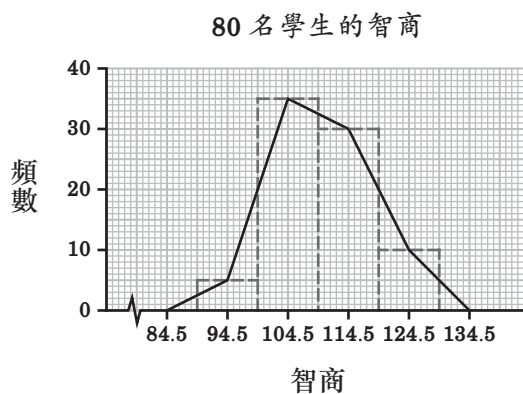
例



頻數多邊形

從已知組織圖可以得出頻數多邊形，方法就是連接組織圖上的組中點。

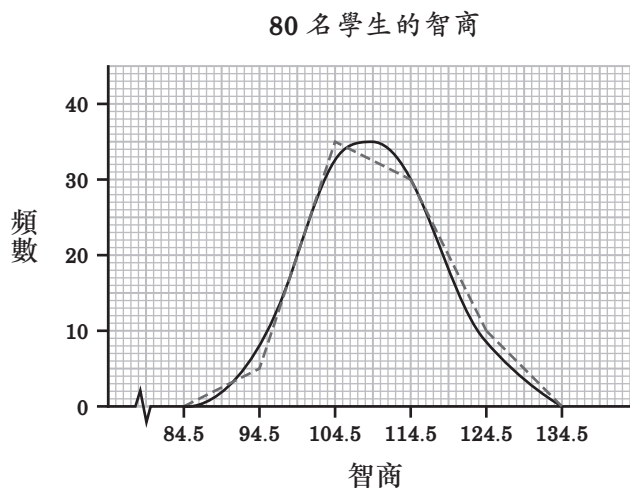
例



頻數曲線

把頻數多邊形繪畫成平滑的曲線圖像，便得到對應的頻數曲線。

例 下圖中的實線部分是一條頻數曲線。



累積頻數

累積頻數表

根據已知的頻數分佈表，可作出對應的累積頻數表。

例

智商	頻數
90–99	5
100–109	35
110–119	30
120–129	10

頻數分佈表

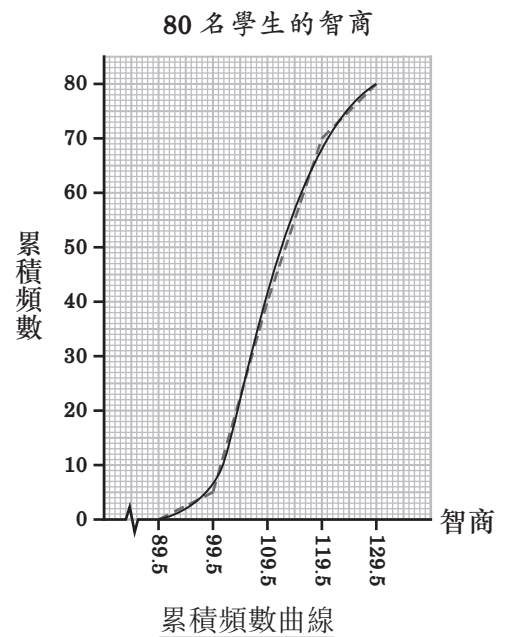
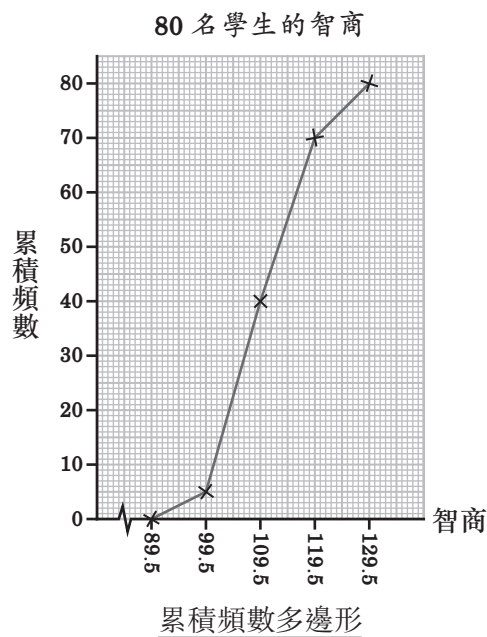
智商低於	累積頻數
89.5	0
99.5	5
109.5	40
119.5	70
129.5	80

累積頻數表

累積頻數多邊形和累積頻數曲線

根據累積頻數表，可作出累積頻數多邊形。把累積頻數多邊形繪畫成一條平滑的曲線，便成為一條累積頻數曲線。

例



涉及初中的數據處理範疇課題的精要回顧

(D3) 集中趨勢的度量

要點重溫

A. 集中趨勢的度量基本知識

以下是三種常用的集中趨勢的度量，它們可以反映一組統計數據的中心所在：

1. **平均數**：對於 n 個數據， $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

$$\text{平均數 } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

例 考慮數據：7, 13, 16, 24, 30，平均數 $= \frac{7+13+16+24+30}{5} = 18$

注意：有時公開試中出現「平均值」一詞，也是指平均數。

2. **中位數**：將一組數據按大小次序排列，位於中央的數值稱為中位數。

因此，對於 n 個由小至大（或由大至小）順序排列的數據，

當 n 是奇數時，中位數是第 $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ 個數據。

當 n 是偶數時，中位數是第 $\left(\frac{n}{2}\right)$ 和第 $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ 個數據的平均數。

例 (a) 數據 7, 13, 16, 24, 30 的中位數是 16。

◀ 這組數據已經由小至大排列。

(b) 考慮另一組數據 30, 8, 9, 71, 30, 20。

先由小至大排列：8, 9, 20, 30, 30, 71，故中位數 $= \frac{20+30}{2} = 25$ 。

3. **眾數**：一組數據中頻數最高的數據。

例 (a) 數據 7, 13, 16, 24, 30 沒有眾數。

◀ 視乎數據的情況，可以不存在眾數，也可以有多於一個眾數。

(b) 數據 30, 8, 9, 71, 30, 20 的眾數是 30。

(c) 數據 27, 22, 22, 13, 27, 19 的眾數是 22 和 27。

B. 求大量不分組數據的集中趨勢

1. **平均數**：若數據 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的頻數分別是 $f_1, f_2, \dots, f_n$ ，則

$$\text{平均數 } \bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

2. **中位數**：由頻數分佈表中位於中間位置的數據求得。

3. **眾數**：頻數分佈表中頻數最高的數據。

例 右表顯示一班同學在過去一個月到戲院看電影的次數。

$$\bar{x} = \frac{0 \times 29 + 1 \times 5 + 2 \times 1}{29 + 5 + 1} = 0.2,$$

中位數 = 0，眾數 = 0

看電影的次數	0	1	2
頻數	29	5	1

習題

在下列各題中，對的在方格內加「✓」，錯的加「✗」。[第 1–5 題]

1. 計算平均數和眾數時，無須先將數據排序。 ☐
2. 一組數據的中位數必然是其中一個數據。 ☐
3. 如果一組數據中各數據的頻數相同，則全部都是眾數。 ☐
4. 計算平均數時，必須用到全體數據。 ☐
5. 一組數據的平均數、中位數和眾數的值一定不相同。 ☐
6. 對於大量不分組的數據，平均數 = $\frac{\text{數據與對應頻數乘積之和}}{(\quad)\text{之和}}$ 。
7. 中位數是頻數分佈表中位於 _____ 位置的數據。
8. 眾數是頻數分佈表中頻數 _____ 的數據。

求下列各組數據的 (a) 平均數，(b) 中位數及 (c) 眾數。[第 9–11 題]

9. 14, 15, 18, 18, 20
10. 144 cm, 148 cm, 144 cm, 150 cm, 150 cm, 152 cm
11. 27 L, 24 L, 30 L, 33 L, 34 L, 40 L, 36 L

求下列各組數據的 (a) 平均數，(b) 中位數及 (c) 眾數。[第 12–13 題]

12.

一組受訪者於過去半年的捐血次數	頻數
0	38
1	7
2	5

13.

某遊學團的參加學生的年齡	頻數
13	13
14	13
15	15
16	9

答案：

1. ✓ 2. ✗ 3. ✗ 4. ✓ 5. ✗ 6. 頻數 7. 中間 8. 最高
9. (a) 17 (b) 18 (c) 18 10. (a) 148 cm (b) 149 cm (c) 144 cm, 150 cm
11. (a) 32 L (b) 33 L (c) 沒有眾數 12. (a) 0.34 次 (b) 0 次 (c) 0 次 13. (a) 14.4 歲 (b) 14 歲 (c) 15 歲

要點重溫

C. 求已分組數據的集中趨勢

1. **平均數**：利用每組數據的組中點代表整組數據，從而求出全部數據的平均數。

$$\bar{x} = \frac{xf \text{ 的和}}{f \text{ 的和}}$$

2. **中位數**：利用累積頻數多邊形（或曲線）找出對應於一半頻數的數據，就是中位數。

3. **眾數組**：頻數分佈表中頻數最高的組區間。

例 右表顯示一組成年人的中文打字速率。

$$\bar{x} = \frac{4.5 \times 4 + 14.5 \times 11 + 24.5 \times 5}{4 + 11 + 5} \text{ 字/分鐘}$$

$$= 15 \text{ 字/分鐘}$$

眾數組是 10 字/分鐘 – 19 字/分鐘。

中文打字速率 (字 / 分鐘)	組中點 (字 / 分鐘)	頻數
0–9	4.5	4
10–19	14.5	11
20–29	24.5	5

D. 四分位數和百分位數

1. **四分位數**：把由小至大排列的一組數據分成 4 等份的三個值。

Q_1 、 Q_2 和 Q_3 分別稱為第 1、第 2、第 3 個四分位數。 ◀ Q_2 相當於中位數。

2. **百分位數**：把由小至大排列的數據分成 100 等份的 99 個數值。

P_1 、 P_2 、 $\dots$ 、 P_{99} 分別稱為第 1、第 2、 $\dots$ 、第 99 個百分位數。

注意：在一個累積頻數多邊形（或曲線）中，若總頻數是 N ，

$$Q_k = \text{第} \left(N \times \frac{k}{4} \right) \text{ 個數據}, P_k = \text{第} \left(N \times \frac{k}{100} \right) \text{ 個數據}。$$

例 (a) 已知 15 件兒童手提電話玩具的最高音量（單位是分貝）測試如下：

75 75 76 80 80 81 81 82 87 87 90 91 93 98 104



Q_1 = 第 4 個數據 = 80 分貝， Q_2 = 第 8 個數據 = 82 分貝， Q_3 = 第 12 個數據 = 91 分貝

- (b) 右圖顯示某專業資格考試 50 名考生的成績。

從圖中可見，

$$Q_2 \text{ (中位數)} = \text{第} \left(50 \times \frac{1}{2} \right) \text{ 個數據}$$

$$= \text{第 25 個數據}$$

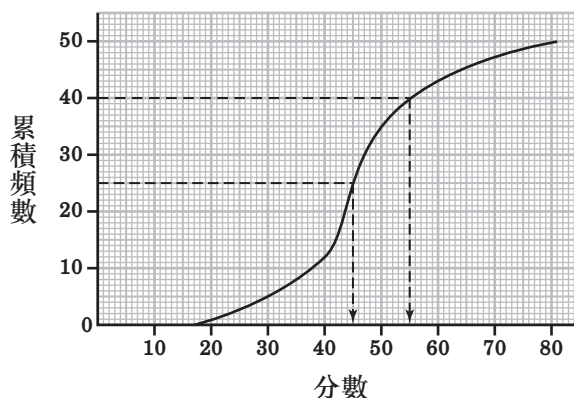
$$= 45 \text{ 分}$$

$$P_{80} = \text{第} \left(50 \times \frac{80}{100} \right) \text{ 個數據}$$

$$= \text{第 40 個數據}$$

$$= 55 \text{ 分}$$

某專業資格考試中 50 名考生的成績

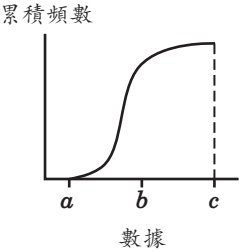


習題

在下列各題中，對的在方格內加「✓」，錯的加「✗」。[第 14–18 題]

14. 利用每組數據的組中點代表整組數據而求出全體數據的平均數，只是一個估計值。 ☐

15. 右圖顯示一組數據的累積頻數分佈。
如果 $c - b = b - a$ ，則可確定中位數就是 b 。 ☐



16. 分組數據必然有一個眾數組。 ☐

17. 若 a, b, c, d, e, f, g 是由小至大排列，則 $Q_1 = f, Q_2 = d, Q_3 = b$ 。 ☐

18. $Q_1 = P_{25}, Q_2 = P_{50}, Q_3 = P_{75}$ ☐

求下列各組數據的平均數及眾數組。[第 19–20 題]

19. 一組住宅單位的面積：

面積 (m^2)	組中點 (m^2)	頻數
20–29	24.5	13
30–39	34.5	18
40–49	44.5	19

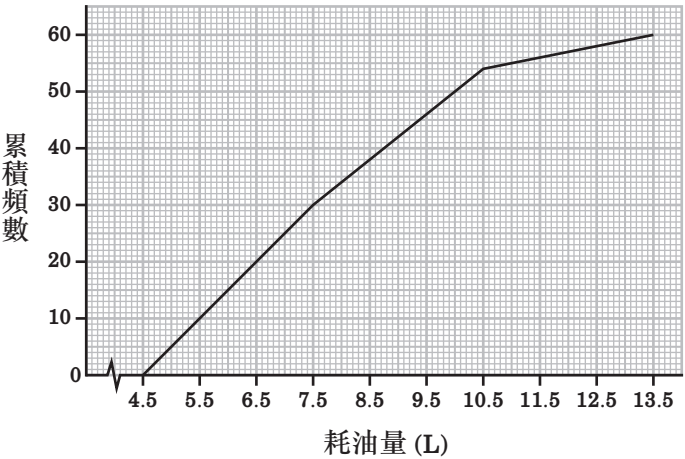
20. 某校的中四同學參與智力測試的成績：

智商	頻數
95–99	20
100–104	61
105–109	52
110–114	17

21. 參看上一頁 D 部的例 (b)，求 P_{60} 。

22. 右圖顯示 60 款汽車每行駛 100 公里的耗油量。求 Q_2 、 Q_3 和 P_{30} 。

60 款汽車每行駛 100 公里的耗油量



答案：

14. ✓ 15. ✗ 16. ✗ 17. ✗ 18. ✓ 19. $35.7 m^2, 40 m^2 - 49 m^2$
20. 104.2, 100–104 21. 47 分 22. $Q_2 = 7.5 L, Q_3 = 9.4 L, P_{30} = 6.3 L$

要點重溫

E. 加權平均數

權（或權數）是用來表示一組數據中每一項目的比重。

設數據 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的權分別是 $w_1, w_2, \dots, w_n$ ，則：

$$\text{加權平均數} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

F. 數據變化對集中趨勢的度量之影響

1. 每個數據加上一個相同的常數

設一組數據的平均數是 m ，中位數是 n ，眾數是 p 。若每個數據都加上一個相同的常數 k ，則三種度量亦各自加上 k ，如下表所示。

	平均數	中位數	眾數
原數據組	m	n	p
每個數據 $+ k$	$m + k$	$n + k$	$p + k$

注意： k 的值可以是正數、負數或 0。

2. 每個數據乘以一個相同的常數

設一組數據的平均數是 m ，中位數是 n ，眾數是 p 。若每個數據都乘以一個相同的常數 k ，則三種度量亦各自乘以 k ，如下表所示：

	平均數	中位數	眾數
原數據組	m	n	p
每個數據 $\times k$	km	kn	kp

注意： k 的值可以是正數或負數。

例

已知一組數據的平均數是 20，中位數是 21，眾數是 23。

若各數據加上 3，則平均數、中位數及眾數的新值分別是 23、24 及 26。

若各數據乘以 3，則平均數、中位數及眾數的新值分別是 60、63 及 69。

習題

23. 把所有數據與其對應權數的積相加，再除以數據的總數便是加權平均數。答：☐對 ☐錯

已知 $a, b, b, 5, 7, e, f$ 是由小至大排列的一組數據，且全部是正數， $b < 5$ 及平均數是 m ，中位數是 5，眾數是 b 。完成以下填充。[第 24–25 題]

✂ 24. 若各項都加上 3，則新的平均數是 _____，中位數是 _____，眾數是 _____。

✂ 25. 若各項都乘以 10，則新的平均數是 _____，中位數是 _____，眾數是 _____。

26. 下表顯示晶晶和加文在上學期兩次中文科測驗中的成績。

	測驗一	測驗二
晶晶	80	40
加文	60	56
權數	3	5

計算兩人的加權平均分，判斷誰的成績較佳。

27. 4 名入選國家隊的長跑運動員的體重分別是 68 kg、70 kg、74 kg 和 78 kg。

(a) 求 4 人體重的平均數和中位數。

✂ (b) 經過特訓後，各人的體重恰巧都增加了 10%。求 4 人新的體重的平均數和中位數。

答案：

23. 錯 24. $m + 3$, 8 , $b + 3$ 25. $10m$, 50 , $10b$ 26. 晶晶：55 分，加文：57.5 分，加文的成績較佳
27. (a) 72.5 kg, 72 kg (b) 79.75 kg, 79.2 kg

(D4) 基礎概率

要點重溫

A. 概率

1. 概率是表示某事件發生的可能性的一個數值。
2. 等可能結果是指發生的可能性相等的兩個或多個結果。
例 投擲一枚勻稱骰子，共有 6 個可能結果，它們是等可能結果。
3. **定義**：設 E 是某事件而 $P(E)$ 表示其概率。若所有可能結果皆屬等可能結果，則

$$P(E) = \frac{\text{符合事件 } E \text{ 的結果的數目}}{\text{所有可能結果的總數}}$$

例 投擲一枚勻稱骰子，考慮擲得 3 的倍數的概率。

∴ 符合事件的結果有 2 個：3、6

$$\therefore P(3 \text{ 的倍數}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

4. (a) 對於任何事件 E ， $0 \leq P(E) \leq 1$ 。
 (b) 一定會發生的事件稱為「必然事件」，其概率等於 1。
 (c) 絕不可能發生的事件稱為「不可能事件」，其概率等於 0。

B. 相對頻數

事件 E 的相對頻數

$$= \frac{\text{事件 } E \text{ 發生的次數}}{\text{試驗的次數}}$$

我們可以利用相對頻數來估計事件的概率。

例 投擲一枚硬幣 100 次，已知其中 37 次為正面，63 次為反面。可根據上述數據，估計再投擲一次時得正面的概率是 $\frac{37}{100}$ 。

習題

在下列各題中，對的在方格內加「✓」，錯的加「✗」。[第 1–5 題]

1. 一盤水果中有 2 個橙和 4 個蘋果。如果隨機取一個，則「選中橙」和「選中蘋果」是等可能結果。 ☐
2. 「從所有正整數中隨機選出 -1 這個整數」是不可能事件。 ☐
3. 「由香港島前往九龍的巴士經過某條海底隧道」是必然事件。 ☐
4. 從《木蘭辭》的首兩句「唧唧復唧唧，木蘭當戶織」中隨機選一字，求選中粵音為「即」的字的概率。
5. 一班 36 名同學中有 30 名配戴眼鏡，其中又有 2 名是左撇子。老師從班中隨機選出一名同學當值日生，求選中戴眼鏡但慣用右手的同學的概率。
6. 陳婆婆的錢包裏有 4 枚 \$10 硬幣、2 枚 \$5 硬幣、3 枚 \$2 硬幣和 3 枚 \$1 硬幣。若她隨機抽出一枚硬幣來買旗，求抽中的硬幣面額高於 \$2 的概率。
7. 彥恒正和朋友打保齡球。在他剛完成的 20 次投球中，有 4 次全中，8 次補中，其餘則未能全中或補中。估計他在下一輪投球中做出以下成績的概率。
 - (a) 全中
 - (b) 未能全中或補中

答案：

1. ✗ 2. ✓ 3. ✓ 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{7}{9}$ 6. $\frac{1}{2}$ 7. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{2}{5}$

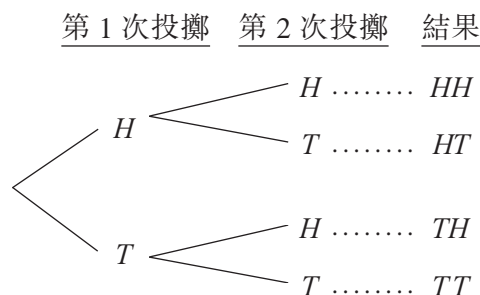
要點重溫

C. 列出可能結果的方法

利用以下方法可以有系統地列出所有可能結果。

1. 樹形圖

例 投擲一枚硬幣兩次，所有可能結果可以用右方樹形圖顯示。
(設 H 代表正面， T 代表反面。)



2. 列表法

例 投擲一枚硬幣兩次，所有可能結果可以用右表列出。

		第 2 次投擲	
		正	反
第 1 次投擲	正	正正	正反
	反	反正	反反

✂ D. 期望值

1.

若在一次試驗中，某事件發生的概率是 p ，則在 n 次試驗中，可以期望該事件會發生 np 次。

例 某生產商發現他們製造的光學滑鼠有毛病的概率是 0.001 2。
在 20 000 個滑鼠中，可以估計有毛病的滑鼠的數目 = $20\ 000 \times 0.001\ 2 = 24$

2.

對於一個有 n 個可能結果的試驗，
若每個結果發生的概率分別是 $p_1, p_2, \dots, p_n$ ，
而各結果對應取得的值分別是 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，
則這個試驗的期望值是 $p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n$ 。

例 根據過去一年的成績，某支足球隊在一場比賽中獲勝、賽敗及賽和的概率分別是 0.4、0.2 及 0.4。在每一場賽事中，勝方可得 3 分，敗方得 0 分，賽和則各得 1 分。
該球隊在一場賽事中的期望得分 = $(0.4 \times 3 + 0.2 \times 0 + 0.4 \times 1)$ 分 = 1.6 分

習題

8. 文彬和心怡正在玩「包剪揼」猜拳遊戲。
- (a) 試以樹形圖列出所有可能結果。
(建議符號：○ 代表包，✕ 代表剪，□ 代表揼。)
- (b) 假設兩人以隨機方式出拳，在每次出拳時，文彬猜贏的機會是多少？
9. 嘉惠認識了一位新朋友穎琪，想知道她的出生日期。穎琪說：「我的出生月份和日子，都是個位的質數，你猜吧。」
- (a) 試以中國數字標記月份（例如二、三），阿拉伯數字標記日子（例如 2、3），然後以列表方式列出穎琪的出生日期的所有可能結果。
- (b) 嘉惠猜中穎琪的出生日期的概率是多少？
- (c) 如果穎琪的出生日期是 2 月 7 日，嘉惠只猜中出生月份或出生日子的概率是多少？
- ✂ 10. 綠海龜孵化後，便會自動爬向大海生活，而成功生長至成年的概率是 0.1%。若某保育組織於一沙灘發現 20 窩共 2 000 隻綠海龜蛋，試估計當牠們全部孵化後，能生存至成年的數目。
- ✂ 11. 曾小姐獲推薦參加一項專業課程，各學員須先行支付學費 \$5 000。完成課程後，會按照出席率及評核考試成績，獲退還全部或部分學費如下：

	退還學費
(一) 出席率不少於 90% 及考獲 A 級成績	全數
(二) 出席率不少於 90% 及考獲 B 級成績	70%
(三) 出席率不少於 90% 及考獲 B 級以下成績	30%
(四) 出席率少於 90%	無

曾小姐估計發生情況（一）、（二）、（三）及（四）的概率分別為 0.1、0.2、0.5 及 0.2。求她修讀該課程後的期望獲退還學費。

答案：

8. (b) $\frac{1}{3}$

9. (b) $\frac{1}{16}$ (c) $\frac{3}{8}$

10. 2

11. \$1 950

綜合評估 B

1. 計算下列數據的平均數、中位數、眾數及第 3 個四分位數。

(如有需要，取答案準確至最接近的 kg。)

46 kg, 40 kg, 38 kg, 35 kg, 40 kg, 36 kg

2. (a) 求下表所示數據的平均數及眾數組。(如有需要，取答案準確至最接近的整數。)

受訪者曾經從事的全職工作數目 (份)	頻數
1–3	57
4–6	32
7–9	11

(b) 若從這組受訪者中隨機選一人，求選中的人士曾經從事超過 6 份全職工作的概率。

3. 某城市選舉年度最佳運動員，評分包括各提名人過去一年於國際性賽事中的得獎次數 (每次 1 分) 及評選委員會成員投票 (每票 1 分) 兩部分。下表所示為成績最佳的 3 名提名人的得票。計算各人的加權平均分。誰可成為該城市的「年度最佳運動員」?

	<u>閻惠恩</u>	<u>祈天凱</u>	<u>孫家迅</u>	權數
得獎次數	5	6	4	6
評選委員會成員投票	8	5	7	4

4. 以下是兩名駕駛導師在 2022 年和 2023 年的學生數目及一次過考得車牌的學生數目 (即首次考牌便成功)。試綜合兩年的數據，並利用相對頻數的概念，判斷選哪一名導師，一次過考得車牌的成功率比較大。

	2022		2023	
	學生數目	一次過考得車牌的學生數目	學生數目	一次過考得車牌的學生數目
<u>甄師傅</u>	75	50	67	43
<u>洪師傅</u>	64	45	70	56

5. 在一項「猜球」表演中，魔術師在枱上放了兩隻相同的杯子，並把一軟膠小球覆蓋在其中一個杯下，再迅速把兩杯挪移（交換位置）數次，然後請現場觀眾猜出小球位置。柏飛被魔術師邀請出來玩遊戲，一共玩了兩次。從概率來考慮，他最少猜中一次的機會是多少？試以樹形圖或列表法解釋你的答案。
- ✂ 6. 某電訊公司的推銷員進行電話促銷，而達成交易的概率平均只有 3%（即每打出 100 個電話，只有 3 人成為客戶），每個達成交易的客戶平均光顧的產品或合約服務總值為 \$3 800。若公司要求推銷員每個月的營業額需達到 \$300 000，平均每天最少要打出多少個促銷電話才有可能達標？（以每月 30 天計，並取答案準確至最接近的整數。）

答案：

1. 平均數 = 39 kg，中位數 = 39 kg，眾數 = 40 kg，第 3 個四分位數 = 40 kg
2. (a) 4 份，1 份–3 份 (b) $\frac{11}{100}$
3. 閻惠恩：6.2 分，祈天凱：5.6 分，孫家迅：5.2 分，閻惠恩
4. 洪師傅
5. $\frac{3}{4}$
6. 88 個

|||||

此頁空白