

目錄

簡介	iv
1 複數的運算	1.1
答案 (快將提供題解)	ans-1.1
5 對數函數	5.1
題解 (附答案)	sol-5.1
11 排列與組合	11.1
答案 (快將提供題解)	ans-11.1

簡介

DSE 高中非基礎課題精進練習是為配合《高中牛津數學新世代》而設計，旨在幫助學生溫習在高中階段已學習的非基礎課題。

每章包括下列各部分：

- (i) **要點重溫** — 扼要的重溫內容，供學生溫習
- (ii) **習題 A** — 充足的考試題型的**問答題**供學生練習，並附有公開**試題參考**
- (iii) **習題 B** — 充足的考試題型的**多項選擇題**供學生練習，並附有公開**試題參考**

下表列出了 DSE 高中非基礎課題精進練習各課題的編排，以供參考。

課題	參考
1 複數的運算	4A 第 1 章
2 兩根之和及兩根之積	4A 第 3 章
3 配方法	4A 第 5 章
4 指數函數	4B 第 7 章
5 對數函數	4B 第 8 章
6 有理函數的運算、多項式的最大公因式和最小公倍式	4B 第 9 章
7 圓的性質 (切線)	4B 第 12 章
8 可變換為二次方程的方程	5A 第 1 章
9 一元二次不等式	5A 第 2 章
10 函數的變換	5A 第 3 章
11 排列與組合	5A 第 5 章
12 概率	5A 第 6 章
13 圓的方程 (交點、切線)	5B 第 8 章
14 三角學 (平面圖形)	5B 第 9 章
15 三角學 (立體圖形)	5B 第 10 章
16 標準分及改變數據對離差的影響	5B 第 11 章
17 等差數列	6 第 1 章
18 等比數列	6 第 2 章
19 線性規畫	6 第 3 章

姓名：_____

班別：_____ ()

DSE 課題精進練習**1 複數的運算** **高中** **非基礎課題****要點重溫****(a) 虛數及複數**

- (i) $i = \sqrt{-1}$ 及 $i^2 = -1$ ，其中 i 稱為虛數單位。
- (ii) 假設複數 z 可寫成 $a + bi$ 的形式，其中 a 及 b 都是實數。
- (1) a 稱為 z 的實部。
 b 稱為 z 的虛部。
- (2) 若 $b = 0$ ，則 z 是一個實數。
- (3) 若 $a = 0$ 及 $b \neq 0$ ，則 z 是一個虛數 (或一個純虛數)。

(b) 複數的運算

假設 a 、 b 、 c 及 d 都是實數。

- (i) $i^2 = -1$ ， $i^3 = -i$ ， $i^4 = 1$ ， $i^5 = i$ ， $i^6 = -1$ ，...

一般來說，

$$i^{4n} = 1,$$

$$i^{4n+1} = i,$$

$$i^{4n+2} = -1,$$

$$i^{4n+3} = -i,$$

其中 n 是一個非負整數。

- (ii) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

- (iii) 在複數的除法中，若分母是複數 $a + bi$ ，則我們可於分子及分母同時乘以 $a - bi$ 。

$$\begin{aligned}\text{例如：} \quad \frac{2}{1+i} &= \frac{2}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} \\ &= \frac{2(1-i)}{1^2 - i^2} \\ &= \frac{2(1-i)}{1 - (-1)} \\ &= \underline{\underline{1-i}}\end{aligned}$$

- (iv) 若 $a + bi = c + di$ ，則 $a = c$ 及 $b = d$ 。

	DSE 程度 (2+)	DSE 程度 (4+)	DSE 程度 (5**)
習題 1A		1–3	
習題 1B	1–3	4–15	16–17

習題 1A 問答題

1. (a) 將 $\frac{1}{1+3i}$ 表成 $a+bi$ 的形式，其中 a 及 b 均為實數。

4+

#(b) 設 $f(x) = x^2 + px + q$ 。二次方程 $f(x) = 0$ 的兩根為 $\frac{10}{1+3i}$ 及 $\frac{10}{1-3i}$ 。

(i) 求 p 及 q 的值。

(ii) 求 r 值的範圍使得二次方程 $x^2 + px + q = r$ 沒有實根。

試題參考

HKDSE 練習卷 (卷一) 第 17 題

#: 若未學習 4A 冊第 3 章「一元二次方程」，則略過 (b) 部的題目。

2. (a) 將 $\frac{1}{3+2i}$ 表成 $a+bi$ 的形式，其中 a 及 b 均為實數。

4+

#(b) 設 $f(x) = x^2 + cx + d$ 。二次方程 $f(x) = 0$ 的兩根為 $\frac{26}{3+2i}$ 及 $\frac{26}{3-2i}$ 。

(i) 求 c 及 d 的值。

(ii) 利用配方法，求 $y = f(x)$ 的圖像的頂點的坐標。

試題參考

HKDSE 練習卷(卷一) 第17題

#: 若未學習 4A 冊第 5 章「二次函數」，則略過 (b) 部的題目。

3. 定義 $z_1 = \frac{4+ki}{1+i}$ 及 $z_2 = \frac{k+2i}{2+i}$ ，其中 k 為一實數。已知 z_1 的虛部等於 z_2 的虛部。

4+

(a) 求 k 的值。(b) 求 $z_1 + z_2$ 。

試題參考

HKDSE 2020 (卷二) 第 37 題

習題 1B 多項選擇題

1. $i^3(4 + \alpha i) =$

(2+)

- A. $4 + \alpha i$ 。
B. $4 - \alpha i$ 。
C. $\alpha + 4i$ 。
D. $\alpha - 4i$ 。

試題參考

HKDSE 2012 (卷二) 第 35 題

2. 若 k 為一實數，則 $3k - \frac{5 - ki}{i} =$

(2+)

- A. $4k + 5i$ 。
B. $4k - 5i$ 。
C. $-4 + 5ki$ 。
D. $-4 - 5ki$ 。

試題參考

HKDSE 樣本試卷 (卷二) 第 34 題

3. 若 x 為一實數，則 $(x - 2i)(2 - i)$ 的實部為

(2+)

- A. $x - 4$ 。
B. $4 - x$ 。
C. $2x + 2$ 。
D. $2x - 2$ 。

試題參考

HKDSE 練習卷 (卷二) 第 34 題

4. $i + 3i^2 + 5i^3 + 7i^4 + 9i^5$ 的實部為

(4+)

- A. -4 。
B. 0 。
C. 4 。
D. 5 。

試題參考

HKDSE 2013 (卷二) 第 36 題

5. 設 $z = (a + 2)i^5 + (a - 7)i^6$ ，其中 a 為一實數。若 z 為一實數，則 $a =$

(4+)

- A. -8 。
B. -2 。
C. 2 。
D. 8 。

試題參考

HKDSE 2015 (卷二) 第 35 題

6. 設 $z = -6 - 2i^7 + 4ki^{14} + 3i^{20} - 5ki^{29}$ ，其中 k 為一實數。若 z 的實部與虛部相等，則 z 的虛部為

4+

- A. 0。
- B. 5。
- C. 14。
- D. -23。

試題參考

HKDSE 2022 (卷二) 第 35 題

7. 若 k 為一實數，則 $\frac{k}{k+i}$ 的虛部為

4+

- A. $\frac{k}{k^2+1}$ 。
- B. $\frac{k^2}{k^2+1}$ 。
- C. $-\frac{k}{k^2+1}$ 。
- D. $-\frac{k^2}{k^2+1}$ 。

8. 若 k 及 $\frac{10}{3+i} - ki$ 均為實數，則 $k =$

4+

- A. -3。
- B. -1。
- C. 1。
- D. 3。

試題參考

HKDSE 2017 (卷二) 第 35 題

9. 若 k 為一實數及 $\frac{17}{4-i} - k$ 為一純虛數，則 $k =$

4+

- A. -4。
- B. -1。
- C. 1。
- D. 4。

試題參考

HKDSE 2017 (卷二) 第 35 題

10. 若 β 為一實數，則 $\frac{4+\beta^2}{2-\beta i} =$

4+

- A. $2 + \beta i$ 。
- B. $2 - \beta i$ 。
- C. $\beta + 2i$ 。
- D. $\beta - 2i$ 。

試題參考

HKDSE 2014 (卷二) 第 36 題

11. 若 a 為一實數，則 $\frac{3+i^5}{a+i} - i^7$ 的虛部為

4+

- A. $\frac{3a+1}{a^2-1}$ 。
 B. $\frac{3a+1}{a^2+1}$ 。
 C. $\frac{a^2+a-2}{a^2-1}$ 。
 D. $\frac{a^2+a-2}{a^2+1}$ 。

試題參考

HKDSE 2019 (卷二) 第 34 題

12. 若 a 為一實數及 $\frac{2+i^9}{a+i} + i^6$ 為一虛數，則 $a =$

4+

- A. 0。
 B. 2。
 C. 0 或 2。
 D. 0 或 -2。

試題參考

HKDSE 2019 (卷二) 第 34 題

13. $\frac{2i^{14} + 3i^{15} + 4i^{16} + 5i^{17} + 6i^{18}}{1+i}$ 的實部為

4+

- A. -3。
 B. -1。
 C. 1。
 D. 3。

試題參考

HKDSE 2018 (卷二) 第 37 題

14. $\frac{10i^{11} - 8i^{12} + 6i^{13} - 4i^{14} + 2i^{15}}{1-i}$ 的虛部為

4+

- A. -5。
 B. -1。
 C. 1。
 D. 5。

試題參考

HKDSE 2018 (卷二) 第 37 題

15. 定義 $z_1 = \frac{3+ki}{1-i}$ 及 $z_2 = \frac{k+3i}{2+i}$ ，其中 k 為一實數。若 z_1 的實部等於 z_2 的實部，則 $z_1 - z_2 =$

4+

- A. 1。
- B. -1。
- C. i 。
- D. $-i$ 。

試題參考

HKDSE 2020 (卷二) 第 37 題

16. 設 $a = \frac{5}{2k+i}$ 及 $b = \frac{5}{2k-i}$ ，其中 k 為一實數。下列何者必為正確？

5**

- I. ab 為一有理數。
 - II. a 的實部等於 b 的實部。
 - III. $\frac{1}{a}$ 的虛部等於 $-\frac{1}{b}$ 的虛部。
- A. 只有 I
 - B. 只有 II
 - C. 只有 I 及 III
 - D. 只有 II 及 III

試題參考

HKDSE 2016 (卷二) 第 34 題

17. 設 α 為一非零的實數。定義 $a = c - \frac{1}{c}$ 及 $b = c + \frac{1}{c}$ ，其中 $c = \frac{\alpha+i}{\alpha-i}$ 。下列何者正確？

5**

- I. a 為一虛數。
 - II. b 的虛部等於 0。
 - III. c 的虛部等於 $-\frac{1}{c}$ 的虛部。
- A. 只有 I 及 II
 - B. 只有 I 及 III
 - C. 只有 II 及 III
 - D. I、II 及 III

試題參考

HKDSE 2021 (卷二) 第 35 題

1 複數的運算**答案****習題 1A**

1. (a) $\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$
(b) (i) $p = -2$, $q = 10$
(ii) $r < 9$
2. (a) $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$
(b) (i) $c = -12$, $d = 52$
(ii) $(6, 16)$
3. (a) 4
(b) 6

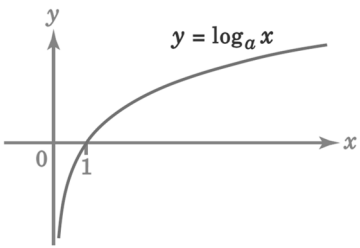
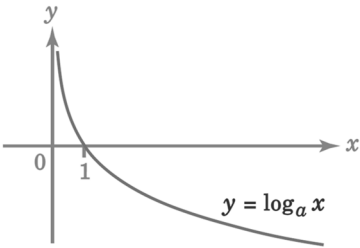
習題 1B

1. D
2. A
3. D
4. C
5. B
6. D
7. C
8. B
9. D
10. A
11. D
12. A
13. B
14. A
15. C
16. D
17. D

姓名：_____

班別：_____ ()

DSE 課題精進練習**5 對數函數****高中****非基礎課題****要點重溫**設 $a > 0$ 及 $a \neq 1$ 。**(a)** 若 $x = a^y$ ，則 $y = \log_a x$ 。若 $y = \log_a x$ ，則 $x = a^y$ 。注意： $\log_{10} x$ 可簡寫成 $\log x$ 。**(b) (i)** $\log_a a^y = y$ **(ii)** $\log_a 1 = 0$ **(iii)** $\log_a a = 1$ **(iv)** $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ **(v)** $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ **(vi)** $\log_a M^k = k \log_a M$ ，其中 k 是一個實數**(vii)** $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$ **(c)** 下表是 $y = \log_a x$ 的圖像的各項特徵：

a 值的範圍	$a > 1$	$0 < a < 1$
$y = \log_a x$ 的圖像		
相同的特徵	- 圖像的 x 截距是 1。 - 圖像與 y 軸不相交，且位於 y 軸的右方。	
不同的特徵	- 當 $0 < x < 1$ 時，$y < 0$。 當 $x > 1$ 時，$y > 0$。 - 圖像從左至右向上傾斜。	- 當 $0 < x < 1$ 時，$y > 0$。 當 $x > 1$ 時，$y < 0$。 - 圖像從左至右向下傾斜。

	<i>DSE</i> 程度 ②+	<i>DSE</i> 程度 ④+	<i>DSE</i> 程度 ⑤**
習題 5A		1–2	3
習題 5B	1–2	3–9	10–17

習題 5A 問答題

1. 設 m 及 n 均為常數。將 $y = \log_m x + n$ 的圖像記為 L 。 L 通過點 $(1, 4)$ 及點 $(25, 6)$ 。以 y 表 x 。

4+

試題參考

HKDSE 2017 (卷一) 第 15 題

2. 設 a 及 b 均為常數。將 $y = a + \log_b x$ 的圖像記為 G 。 G 的 x 截距為 8 且 G 通過點 $(128, 4)$ 。

4+

以 y 表 x 。

試題參考

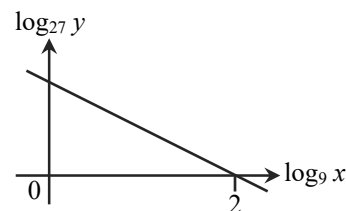
HKDSE 2017 (卷一) 第 15 題

3. 圖中的圖像顯示 $\log_9 x$ 與 $\log_{27} y$ 之間的線性關係。該圖像的

5**

斜率及在水平軸上的截距分別為 $-\frac{1}{2}$ 及 2。將 x 與 y 之間的關

係表為 $y = Ax^k$ 的形式，其中 A 及 k 均為常數。



試題參考

HKDSE 2014 (卷一) 第 15 題

習題 5B 多項選擇題

1. 設 $b > 1$ 。若 $a = \log_7 b$ ，則 $\frac{1}{a} =$

(2+)

- A. $\log_b \frac{1}{7}$ 。
 B. $\log_b 7$ 。
 C. $\log_7 \frac{1}{b}$ 。
 D. $\frac{1}{\log_b 7}$ 。

2. 若 $\frac{3}{2\log x - 1} = \frac{5}{2\log x + 1}$ ，則 $\log \frac{1}{x} =$

(2+)

- A. -2 。
 B. $-\frac{1}{2}$ 。
 C. $\frac{1}{2}$ 。
 D. 2 。

3. 下列何者最大？

(4+)

- A. 123^{231}
 B. 231^{213}
 C. 312^{132}
 D. 321^{123}

試題參考

HKDSE 2014 (卷二) 第 33 題

4. 下列何者最小？

(4+)

- A. $(-234)^{456}$
 B. 342^{-465}
 C. $\left(\frac{1}{324}\right)^{645}$
 D. $\left(\frac{2}{423}\right)^{654}$

試題參考

HKDSE 2022 (卷二) 第 31 題

#5. 若方程 $(\log_\pi x)^2 - 13\log_\pi x + 36 = 2\log_\pi x$ 的根為 α 及 β ，則 $\alpha\beta =$

(4+)

- A. π^{13} 。
 B. π^{15} 。
 C. $\log_\pi 13$ 。
 D. $\log_\pi 15$ 。

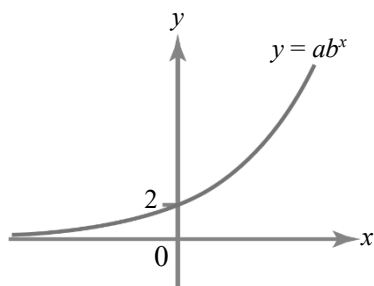
試題參考

HKDSE 2020 (卷二) 第 32 題

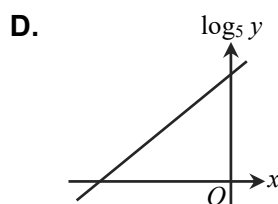
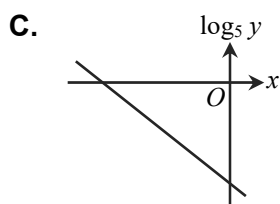
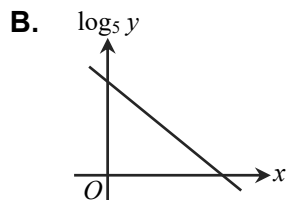
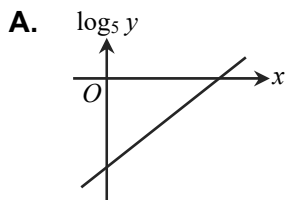
#: 若未學習 5A 冊第 1 章「續方程」，則略過第 5 題。

6.

4+



上圖所示為 $y = ab^x$ 的圖像，其中 a 及 b 均為常數。下列哪一個圖像可表示 x 與 $\log_5 y$ 之間的關係？



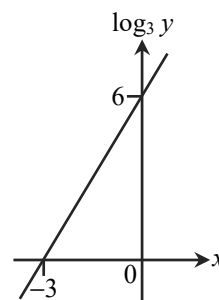
試題參考
HKDSE 2013 (卷二) 第 32 題

7. 圖中的圖像顯示 x 與 $\log_3 y$ 之間的線性關係。

4+

若 $y = mn^x$ ，則 $n =$

- A. 2。
- B. 6。
- C. 9。
- D. 81。



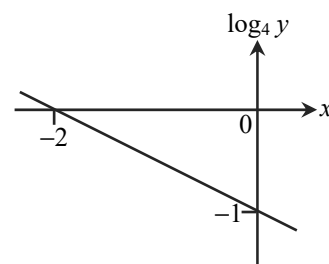
試題參考
HKDSE 2012 (卷二) 第 32 題

8. 圖中的圖像顯示 x 與 $\log_4 y$ 之間的線性關係。

4+

若 $y = ab^x$ ，則 $b =$

- A. -1。
- B. $\frac{1}{4}$ 。
- C. $\frac{1}{2}$ 。
- D. 1。



試題參考
HKDSE 2016 (卷二) 第 32 題

9. 已知 $\log_a y$ 是 x 的線性函數，其中 $0 < a < 1$ 。該線性函數的圖像在垂直軸上的截距及在水平軸上的截距分別為 -4 及 2 。若 $y = rs^x$ ，則下列何者正確？

4+

- I. $r < 1$
 - II. $s < 1$
 - III. $rs^2 = 1$
- A. 只有 I
B. 只有 II
C. 只有 I 及 III
D. 只有 II 及 III

試題參考

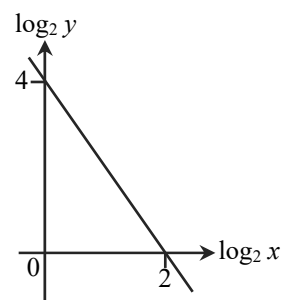
HKDSE 2022 (卷二) 第 32 題

10. 圖中的圖像顯示 $\log_2 x$ 與 $\log_2 y$ 之間的線性關係。

5**

下列何者必為正確？

- A. $x^2y = 16$
B. $xy^2 = 16$
C. $x^2 + y = 16$
D. $x + y^2 = 16$



試題參考

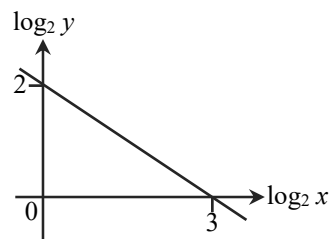
HKDSE 2015 (卷二) 第 32 題

11. 圖中的圖像顯示 $\log_2 x$ 與 $\log_2 y$ 之間的線性關係。

5**

下列何者必為正確？

- A. $x^2y^3 = 64$
B. $x^3y^2 = 64$
C. $x^2 + y^3 = 64$
D. $x^3 + y^2 = 64$



試題參考

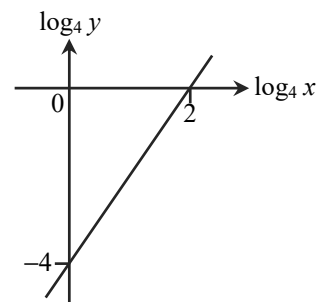
HKDSE 2015 (卷二) 第 32 題

12. 圖中的圖像顯示 $\log_4 x$ 與 $\log_4 y$ 之間的線性關係。

5**

下列何者必為正確？

- A. $xy^2 = 256$
 B. $x^2y = 256$
 C. $\frac{x^2}{y} = 256$
 D. $\frac{x}{y^2} = 256$



試題參考

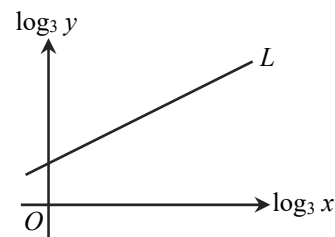
HKDSE 2021 (卷二) 第 34 題

13. 圖中，直線 L 顯示 $\log_3 x$ 與 $\log_3 y$ 之間的關係。已知 L 通過點 $(2, 4)$

5**

及點 $(6, 6)$ 。若 $y = kx^\alpha$ ，則 $k =$

- A. $\frac{1}{2}$ 。
 B. $\sqrt{3}$ 。
 C. 3 。
 D. 27 。



試題參考

HKDSE 2018 (卷二) 第 33 題

14. 已知 $\log_2 y$ 為 $\log_4 x$ 的線性函數。該線性函數的圖像在垂直軸上的截距及在水平軸上的截距分別為 6 及 4。下列何者必為正確？

5**

- A. $x^3y^4 = 2^{24}$
 B. $x^4y^3 = 2^{24}$
 C. $x^4y^6 = 2^{24}$
 D. $x^6y^4 = 2^{24}$

試題參考

HKDSE 2019 (卷二) 第 31 題

15. 設 a 、 b 及 c 均為正常數。在同一直角坐標系上， $y = \log_a x$ 的圖像及 $y = b + \log_c x$ 的圖像分別與 x 軸相交於點 S 及點 T 。將原點記為 O 。求 $OT : OS$ 。

5**

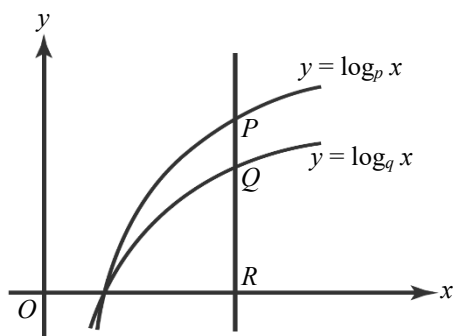
- A. $1 : a^b$
 B. $1 : c^b$
 C. $a^b : 1$
 D. $c^b : 1$

試題參考

HKDSE 2021 (卷二) 第 33 題

16.

5**



圖中所示為在同一直角坐標系上 $y = \log_p x$ 的圖像及 $y = \log_q x$ 的圖像，其中 p 及 q 均為正常數。若一鉛垂線分別與 $y = \log_p x$ 的圖像、 $y = \log_q x$ 的圖像及 x 軸相交於點 P 、點 Q 及點 R ，則下列何者正確？

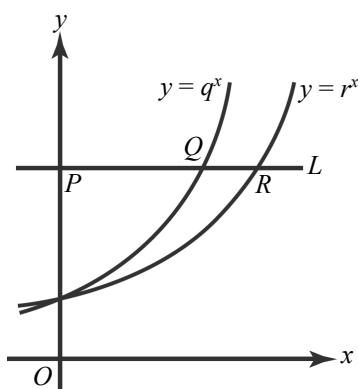
- I. $p < 1$
 - II. $q > p$
 - III. $\frac{PR}{QR} = \log_p q$
- A. 只有 I
B. 只有 II
C. 只有 I 及 III
D. 只有 II 及 III

試題參考

HKDSE 2018 (卷二) 第 32 題

17.

5**



圖中所示為在同一直角坐標系上 $y = q^x$ 的圖像及 $y = r^x$ 的圖像，其中 q 及 r 均為正常數。若一水平線 L 分別與 y 軸、 $y = q^x$ 的圖像及 $y = r^x$ 的圖像相交於 P 、 Q 及 R ，則下列何者正確？

- I. $q > r$
 - II. $qr > 1$
 - III. $\frac{QR}{PR} = \log_q \frac{q}{r}$
- A. 只有 I 及 II
B. 只有 I 及 III
C. 只有 II 及 III
D. I、II 及 III

試題參考

HKDSE 2014 (卷二) 第 32 題

5 對數函數

答案

習題 5A

1. $x = 5^{y-4}$
2. $x = 2^{y+3}$
3. $y = 27x^{-\frac{3}{4}}$

習題 5B

1. B
2. A
3. B
4. C
5. B
6. D
7. C
8. C
9. D
10. A
11. A
12. C
13. D
14. A
15. B
16. D
17. D

5 對數函數

習題 5A

1. 把
- $(1, 4)$
- 代入
- $y = \log_m x + n$
- 。

$$4 = \log_m 1 + n$$

$$n = 4$$

- 把
- $(25, 6)$
- 及
- $n = 4$
- 代入
- $y = \log_m x + n$
- 。

$$6 = \log_m 25 + 4$$

$$2 = \log_m 25$$

$$m^2 = 25$$

$$m = 5 \text{ 或 } -5 \text{ (捨去)}$$

$$\therefore y = \log_5 x + 4$$

$$y - 4 = \log_5 x$$

$$\underline{x = 5^{y-4}}$$

2. 把
- $(8, 0)$
- 代入
- $y = a + \log_b x$
- 。

$$0 = a + \log_b 8$$

$$a = -\log_b 8$$

- 把
- $(128, 4)$
- 及
- $a = -\log_b 8$
- 代入

$$y = a + \log_b x$$

$$4 = -\log_b 8 + \log_b 128$$

$$4 = \log_b 16$$

$$b^4 = 16$$

$$b = 2 \text{ 或 } -2 \text{ (捨去)}$$

- 當
- $b = 2$
- 時,
- $a = -\log_2 8 = -3$
- 。

$$\therefore y = -3 + \log_2 x$$

$$y + 3 = \log_2 x$$

$$\underline{x = 2^{y+3}}$$

$$3. \log_{27} y - 0 = -\frac{1}{2}(\log_9 x - 2)$$

$$\log_{27} y = -\frac{1}{2}\log_9 x + 1$$

$$\log_{27} y = \log_9 x^{-\frac{1}{2}} + \log_9 9$$

$$\log_{27} y = \log_9 9x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\log_3 y}{\log_3 27} = \frac{\log_3 9x^{-\frac{1}{2}}}{\log_3 9}$$

$$\log_3 y = \frac{3}{2}\log_3 9x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\log_3 y = \log_3 (9x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}$$

$$y = (9x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}$$

$$\underline{y = 27x^{\frac{3}{4}}}$$

習題 5B

1. B

$$a = \log_7 b$$

$$= \frac{\log b}{\log 7}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{\log 7}{\log b}$$

$$\underline{\frac{1}{a} = \log_b 7}$$

2. A

$$\frac{3}{2\log x - 1} = \frac{5}{2\log x + 1}$$

$$3(2\log x + 1) = 5(2\log x - 1)$$

$$6\log x + 3 = 10\log x - 5$$

$$8 = 4\log x$$

$$\log x = 2$$

$$\log \frac{1}{x} = \log x^{-1}$$

$$= -\log x$$

$$= \underline{\underline{-2}}$$

3. B

$$\begin{aligned}\log 123^{231} &= 231 \log 123 \\ &= 483 \text{ (準確至三位有效數字)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log 231^{213} &= 213 \log 231 \\ &= 503 \text{ (準確至三位有效數字)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log 312^{132} &= 132 \log 312 \\ &= 329 \text{ (準確至三位有效數字)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log 321^{123} &= 123 \log 321 \\ &= 308 \text{ (準確至三位有效數字)}\end{aligned}$$

$$\therefore \log 231^{213} \text{ 最大。}$$

$$\therefore \underline{231^{213} \text{ 最大。}}$$

4. C

$$\begin{aligned}\log (-234)^{456} &= \log 234^{456} \\ &= 456 \log 234 \\ &= 1080 \text{ (準確至三位有效數字)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log 342^{-465} &= -465 \log 342 \\ &= -1180 \text{ (準確至三位有效數字)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log \left(\frac{1}{324} \right)^{645} &= 645 \log \frac{1}{324} \\ &= -1620 \text{ (準確至三位有效數字)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log \left(\frac{2}{423} \right)^{654} &= 654 \log \frac{2}{423} \\ &= -1520 \text{ (準確至三位有效數字)}\end{aligned}$$

$$\therefore \log \left(\frac{1}{324} \right)^{645} \text{ 最小。}$$

$$\therefore \underline{\left(\frac{1}{324} \right)^{645} \text{ 最小。}}$$

5. B

$$(\log_{\pi} x)^2 - 13 \log_{\pi} x + 36 = 2 \log_{\pi} x$$

$$(\log_{\pi} x)^2 - 15 \log_{\pi} x + 36 = 0$$

$$\therefore \log_{\pi} \alpha + \log_{\pi} \beta = -\frac{-15}{1}$$

$$\log_{\pi} \alpha \beta = 15$$

$$\alpha \beta = \underline{\underline{\pi^{15}}}$$

6. D

把 $(0, 2)$ 代入 $y = ab^x$ 。

$$2 = ab^0$$

$$a = 2$$

留意 $y = 2b^x$ 的圖像從左至右向上傾斜，我們可得 $b > 1$ 。

$$\therefore y = 2b^x$$

$$\log_5 y = \log_5 (2b^x)$$

$$= \log_5 2 + \log_5 b^x$$

$$= (\log_5 b)x + \log_5 2$$

$\therefore \log_5 y$ 對 x 的圖像是一條直線，其中斜率 $= \log_5 b > 0$ 及

$$y \text{ 截距} = \log_5 2 > 0$$

$\therefore$ D 的圖像可代表 x 與 $\log_5 y$ 之間的關係。

7. C

$$y = mn^x$$

$$\log_3 y = \log_3 (mn^x)$$

$$= \log_3 m + \log_3 n^x$$

$$= (\log_3 n)x + \log_3 m$$

圖像的斜率 $= \log_3 n$

$$\frac{0-6}{-3-0} = \log_3 n$$

$$2 = \log_3 n$$

$$n = 3^2$$

$$= \underline{\underline{9}}$$

8. C

$$y = ab^x$$

$$\log_4 y = \log_4 (ab^x)$$

$$= \log_4 a + \log_4 b^x$$

$$= (\log_4 b)x + \log_4 a$$

圖像的斜率 $= \log_4 b$

$$\frac{0-(-1)}{-2-0} = \log_4 b$$

$$-\frac{1}{2} = \log_4 b$$

$$b = 4^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

9. D

I. $y = rs^x$

$$\log_a y = \log_a (rs^x)$$

$$= \log_a r + \log_a s^x$$

$$= (\log_a s)x + \log_a r$$

$$\text{垂直軸上的截距} = \log_a r$$

$$-4 = \log_a r$$

$$r = a^{-4}$$

$$> 1$$

∴ I 不正確。

II. 把 $x = 2$ 、 $\log_a y = 0$ 及 $\log_a r = -4$

$$\text{代入 } \log_a y = (\log_a s)x + \log_a r。$$

$$0 = 2\log_a s - 4$$

$$\log_a s = 2$$

$$s = a^2$$

$$< 1$$

∴ II 正確。

III. $rs^2 = a^{-4}(a^2)^2 = 1$

∴ III 正確。

∴ 答案是 D。

10. A

$$\log_2 y - 4 = \frac{0-4}{2-0}(\log_2 x - 0)$$

$$\log_2 y - 4 = -2\log_2 x$$

$$2\log_2 x + \log_2 y = 4$$

$$\log_2 x^2 + \log_2 y = 4$$

$$\log_2 (x^2 y) = 4$$

$$x^2 y = 2^4$$

$$\underline{x^2 y = 16}$$

11. A

$$\log_2 y - 2 = \frac{0-2}{3-0}(\log_2 x - 0)$$

$$3\log_2 y - 6 = -2\log_2 x$$

$$2\log_2 x + 3\log_2 y = 6$$

$$\log_2 x^2 + \log_2 y^3 = 6$$

$$\log_2 (x^2 y^3) = 6$$

$$x^2 y^3 = 2^6$$

$$\underline{x^2 y^3 = 64}$$

12. C

$$\log_4 y - (-4) = \frac{0-(-4)}{2-0}(\log_4 x - 0)$$

$$\log_4 y + 4 = 2\log_4 x$$

$$2\log_4 x - \log_4 y = 4$$

$$\log_4 x^2 - \log_4 y = 4$$

$$\log_4 \frac{x^2}{y} = 4$$

$$\frac{x^2}{y} = 4^4$$

$$\underline{\frac{x^2}{y} = 256}$$

13. D

$$\log_3 y - 4 = \frac{6-4}{6-2}(\log_3 x - 2)$$

$$\log_3 y - 4 = \frac{1}{2}\log_3 x - 1$$

$$\log_3 y = \frac{1}{2}\log_3 x + 3$$

$$\log_3 y = \log_3 x^{\frac{1}{2}} + \log_3 3^3$$

$$\log_3 y = \log_3 (27x^{\frac{1}{2}})$$

$$y = 27x^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \underline{k = 27}$$

14. A

$$\log_2 y - 6 = \frac{0-6}{4-0}(\log_4 x - 0)$$

$$2\log_2 y - 12 = -3\log_4 x$$

$$3\log_4 x + 2\log_2 y = 12$$

$$\frac{3\log_2 x}{\log_2 4} + 2\log_2 y = 12$$

$$3\log_2 x + 4\log_2 y = 24$$

$$\log_2 x^3 + \log_2 y^4 = 24$$

$$\log_2 (x^3 y^4) = 24$$

$$\underline{x^3 y^4 = 2^{24}}$$

15. B

把 $y = 0$ 代入 $y = \log_a x$ 。

$$0 = \log_a x$$

$$x = 1$$

$\therefore S$ 的坐標是 $(1, 0)$ 及 $OS = 1$ 。

把 $y = 0$ 代入 $y = b + \log_c x$ 。

$$0 = b + \log_c x$$

$$\log_c x = -b$$

$$x = c^{-b}$$

$\therefore T$ 的坐標是 $(c^{-b}, 0)$ 及 $OT = c^{-b}$ 。

$$OT : OS = c^{-b} : 1 = \underline{\underline{1 : c^b}}$$

16. D

I. 從圖可見， $y = \log_p x$ 的圖像及 $y = \log_q x$ 的圖像都從左至右向上傾斜。

$\therefore p > 1$ 及 $q > 1$ 。

$\therefore$ I 不正確。

II. 設 $x = k$ 為該鉛垂線的方程，其中 $k > 1$ 。

P 的坐標 = $(k, \log_p k)$

Q 的坐標 = $(k, \log_q k)$

R 的坐標 = $(k, 0)$

從圖可見，

$$\log_p k > \log_q k$$

$$\frac{\log k}{\log p} > \frac{\log k}{\log q}$$

$$\frac{\log k}{\log p} \times \frac{\log p \log q}{\log k} > \frac{\log k}{\log q} \times \frac{\log p \log q}{\log k}$$

$$\log q > \log p$$

$$q > p$$

$\therefore$ II 正確。

III. $PR = \log_p k$, $QR = \log_q k$

$$\frac{PR}{QR} = \frac{\log_p k}{\log_q k}$$

$$= \frac{\log k}{\log p}$$

$$= \frac{\log q}{\log p}$$

$$= \log_p q$$

$\therefore$ III 正確。

$\therefore$ 只有 II 及 III 正確。

17. D

- I. 從圖可見， $y = q^x$ 的圖像及 $y = r^x$ 的圖像都從左至右向上傾斜。

$\therefore q > 1$ 及 $r > 1$ 。

設 $y = k$ 為該水平線的方程，其中 $k > 1$ 。

P 的坐標 $= (0, k)$

Q 的坐標 $= (\log_q k, k)$

R 的坐標 $= (\log_r k, k)$

從圖可見，

$$\begin{aligned}\log_r k &> \log_q k \\ \frac{\log k}{\log r} &> \frac{\log k}{\log q} \\ \frac{\log k}{\log r} \times \frac{\log r \log q}{\log k} &> \frac{\log k}{\log q} \times \frac{\log r \log q}{\log k} \\ \log q &> \log r \\ q &> r\end{aligned}$$

$\therefore$ I 正確。

- II. $\because q > 1$ 及 $r > 1$ 。

$\therefore qr > 1$

$\therefore$ II 正確。

- III. $QR = \log_r k - \log_q k$, $PR = \log_r k$

$$\begin{aligned}\frac{QR}{PR} &= \frac{\log_r k - \log_q k}{\log_r k} \\ &= \frac{\frac{\log k}{\log r} - \frac{\log k}{\log q}}{\frac{\log k}{\log r}} \\ &= 1 - \frac{\log r}{\log q} \\ &= \frac{\log q - \log r}{\log q} \\ &= \frac{\log \frac{q}{r}}{\log q} \\ &= \log_q \frac{q}{r}\end{aligned}$$

$\therefore$ III 正確。

$\therefore$ I、II 及 III 正確。

姓名：_____

班別：_____ ()

DSE 課題精進練習**11 排列與組合****高中****非基礎課題****要點重溫****(a) 計數原理的加法法則**

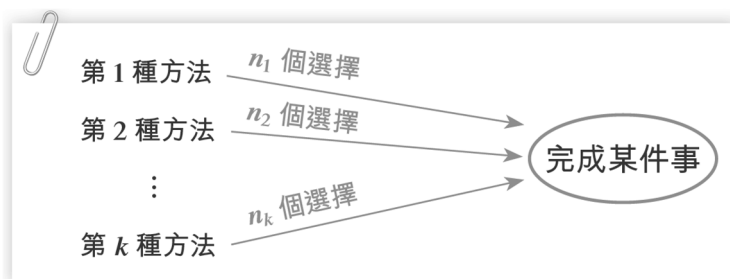
完成一件事有 k 種不同的方法。

假設第一種方法有 n_1 個不同的選擇來完成，第二種方法有 n_2 個不同的選擇來完成， $\cdots$ 和第 k 種方法有 n_k 個不同的選擇來完成，

則完成該件事的不同方法的總數

$$= n_1 + n_2 + \cdots + n_k,$$

且當中沒有選擇是相同的。

**(b) 計數原理的乘法法則**

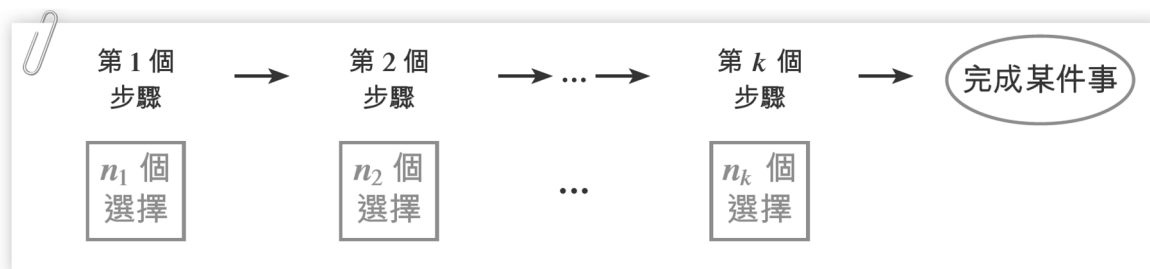
完成一件事有 k 個不同的步驟。

假設步驟 1 有 n_1 個不同的選擇來完成，步驟 2 有 n_2 個不同的選擇來完成， $\cdots$ 和步驟 k 有 n_k 個不同的選擇來完成，

則完成該件事的不同方法的總數

$$= n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k,$$

且當中任何一個步驟的選擇都不受其他步驟的選擇所影響。



(c) 排列

(i) 從 n 個不同物件中選取 n 個物件作無重排列的數目

$$= n!$$

$$= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

(ii) 從 n 個不同物件中選取 r 個物件作無重排列的數目

$$= P_r^n$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

注意：在排列中物件的次序是重要的。

(d) 組合

從 n 個不同物件中選取 r 個物件作無重組合的數目

$$= C_r^n$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

注意：在組合中物件的次序是不重要的。

	DSE 程度 (2+)	DSE 程度 (4+)
習題 11A	1–8	9–10
習題 11B	1–4	5–10

習題 11A 問答題

1. 一個六位密碼由 3、4、5、6、7 及 8 的排列所組成。

2+

(a) 可組成多少個不同的六位密碼？

(b) 若六位密碼的第一個位及最後一個位均為偶數，則可組成多少個不同的六位密碼？

試題參考

HKDSE 2018 (卷一) 第 15 題

2+

- [illegible]

- 3.** 某信封內有 7 枚綠色郵票、2 枚藍色郵票及 4 枚紅色郵票。所有郵票的面值均不相同。若從該信封中同時抽出 5 枚郵票，
- (a)** 求抽出恰好 3 枚綠色郵票的方法的數目，
- (b)** 求抽出恰好 4 枚綠色郵票的方法的數目，
- (c)** 求抽出多於 2 枚綠色郵票的方法的數目。

2+**試題參考**

HKDSE 2017 (卷一) 第 17 題

2+

- ```
=====
```



5. 某班有 13 名男生及 17 名女生。若從該班中選出 4 名學生組成一個有至少 1 名男生及至少 1 名女生的委員會，則可組成多少個不同的委員會？

**2+****試題參考**

HKDSE 2019 (卷一) 第 15 題

6. 某委員會由 5A 班的 6 名學生、5B 班的 4 名學生及 5C 班的 3 名學生組成。若從該委員會中選出 4 名學生，求

2+

- (a) 所選出的 5A 班學生人數與所選出的 5B 班學生人數相同的方法的數目，  
(b) 所選出的 5A 班學生人數與所選出的 5B 班學生人數不同的方法的數目。

試題參考  
HKDSE 2022 (卷一) 第 15 題

7. 某箱內有 4 隻不同的白色杯、8 隻不同的黑色杯及 6 隻不同的藍色杯。若從該箱中同時取出 5 隻杯，求

**2+**

- (a) 取出 5 隻相同顏色的杯的方法的數目，  
(b) 取出至少 2 隻不同顏色的杯的方法的數目。

試題參考

HKDSE 2020 (卷一) 第 15 題

8. 5 名家長與 7 名兒童排成一隊。

2+

(a) 可排成多少不同的隊？

(b) 若沒有家長在該隊中相鄰而排，可排成多少不同的隊？

試題參考

HKDSE 2021 (卷一) 第 15 題

9. 某公司有 7 個部門。每個部門各提名 2 位代表以成立一個 14 人的改革小組。從該小組中選出 5 位成員。

4+

- (a) 求所選出的 5 位成員由 5 個不同的部門提名的方法的數目。  
(b) 求所選出的 5 位成員至多由 4 個不同的部門提名的方法的數目。

試題參考

HKDSE 2012 (卷一) 第 16 題

10. 某學會中有 8 名男生及 7 名女生。若從該學會中同時選出 6 名學生，

4+

- (a) 求選出至少 4 名男生的方法的數目，  
(b) 求選出至少 3 名女生的方法的數目。

試題參考

HKDSE 2013 (卷一) 第 16 題

## 習題 11B 多項選擇題

1. 若某個八位數的首六個位及尾兩個位分別由 1、3、5、7、8、9 的排列及 2、6 的排列所組成，則可組成多少個不同的八位數？

(2+)

- A. 722
- B. 1 440
- C. 2 880
- D. 40 320

試題參考

HKDSE 2022 (卷二) 第 42 題

2. 若某個八位產品碼的首四個位及尾四個位分別由 2、4、6、8 的排列及 1、3、5、7 的排列所組成，則可組成多少個不同的八位產品碼？

(2+)

- A. 16
- B. 48
- C. 576
- D. 40 320

試題參考

HKDSE 2013 (卷二) 第 44 題

3. 某數學學會有 20 名學生及 3 名老師。若從該學會中選出 6 名學生及 1 名老師組成一隊，則可組成多少不同的隊？

(2+)

- A. 38 760
- B. 38 763
- C. 116 280
- D. 245 157

試題參考

HKDSE 2017 (卷二) 第 42 題

4. 某班有 10 名男生及 15 名女生。若從該班中選出 3 名男生及 4 名女生組成一隊，則可組成多少不同的隊？

(2+)

- A. 1 485
- B. 33 480
- C. 163 800
- D. 480 700

試題參考

HKDSE 2014 (卷二) 第 43 題

5. 某班有 11 名男生及 14 名女生。若從該班中選出 4 名相同性別的學生組成一小組，則可組成多少不同的小組？

(4+)

- A. 1 331
- B. 12 650
- C. 330 330
- D. 1 081 575

試題參考

HKDSE 2018 (卷二) 第 42 題

6. 某舞蹈學會由 11 名男生及 7 名女生組成。若從該學會中選出 4 名學生組成一隊參加比賽，且該隊中至少有一名女生，則可組成多少不同的隊？

4+

- A. 2 730
- B. 3 025
- C. 3 060
- D. 65 520

試題參考

HKDSE 2012 (卷二) 第 43 題

7. 某委員會由 16 名學生及 5 名老師組成。若從該委員會中選出 6 名委員組成一個有至少 4 名學生的小組，則可組成多少不同的小組？

4+

- A. 6 216
- B. 24 416
- C. 29 848
- D. 48 048

試題參考

HKDSE 2021 (卷二) 第 42 題

8. 某班有 12 名男生及 16 名女生。若從該班中選出 6 名學生組成一個至多有 2 名男生的隊，則可組成多少不同的隊？

4+

- A. 72 996
- B. 180 544
- C. 196 196
- D. 303 744

試題參考

HKDSE 2016 (卷二) 第 43 題

9. 5 名男生與 4 名女生排成一隊。若男生與女生相隔而排，則可排成多少不同的隊？

4+

- A. 2 880
- B. 43 200
- C. 172 800
- D. 362 880

試題參考

HKDSE 2020 (卷二) 第 42 題

10. 3 名男生與 7 名女生排成一隊。若沒有男生相鄰而排，則可排成多少不同的隊？

4+

- A. 1 693 440
- B. 3 628 800
- C. 5 080 320
- D. 10 160 640

試題參考

HKDSE 2015 (卷二) 第 43 題



## 11 排列與組合

### 答案

#### 習題 11A

1. (a) 720  
(b) 144
2. (a) 144  
(b) 96
3. (a) 525  
(b) 210  
(c) 756
4. (a) 9 900  
(b) 15 642
5. 24 310
6. (a) 162  
(b) 553
7. (a) 62  
(b) 8 506
8. (a) 479 001 600  
(b) 33 868 800
9. (a) 672  
(b) 1 330
10. (a) 1 890  
(b) 3 115

#### 習題 11B

1. B
2. C
3. C
4. C
5. A
6. A
7. D
8. B
9. A
10. A